סמסטר קייץ, מועד א׳, תשנ״ד
תאריך הבחינה: 21.9.94

0366.2106

בחינה בקורס "פונקציות ממשיות"

המורה: פרופ׳ בוריס צירלסון

משך הבחינה: 4 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהוא.

מכסימום הנקודות האפשרי הוא $5 \cdot 25 = 125$. זכותך לענות על כל שאלה או חלק משאלה שתבחר. הציון הוא:

$$\text{ציון} = \min(100, \text{סה״כ הנקודות}) .$$

בכל הטענות המוכחות בקורס אפשר להשתמש ללא הוכחה בפתרונות לשאלות 1, 3–5. בפתרון לשאלה 2 אפשר להשתמש בטענות המוכחות לפני הטענה הנתונה.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח או הפרך את כל אחת מן ה-10 הטענות הבאות.

1.1 אם כל הערכים של פונקצית מדרגות $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הם מספרים שלמים, אזי $\int \varphi$ הוא מספר שלם.

1.2 פונקציה $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא פונקצית מדרגות אם ורק אם הקבוצה $\{x : \varphi(x) \le c\}$ היא אלמנטרית עבור כל $c \in \mathbb{R}$.

1.3 איחוד בן מניה של קבוצות אלמנטריות הוא קבוצה אלמנטרית.

1.4 כל פונקציה מן L^{inc} היא הפרש של שתי פונקציות מדרגות.

1.5 כל פתקציה מן L_1 היא הפרש של שתי פונקציות מן L^{inc}.

1.6 כל פתקצית מדרגות היא הפרש של שתי פונקציות מן L_1.

1.7 קבוצה $S \subset \mathbb{R}^2$ היא סופית או בת מניה אם ורק אם החתך $S_1^x = \{y : (x,y) \in S\}$ הוא קבוצה סופית או בת מניה עבור כל $x \in \mathbb{R}$.

1.8 קבוצה $S \subset \mathbb{R}$ היא מדידה אם ורק אם היא פתוחה או סגורה.

1.9 אם פונקציה f רציפה על $[-1,0]$ וגם על $[0,1]$, אזי $f \in L_1[-1,1]$.

1.10 אם פתקציה f רציפה על $(-1,0)$ וגם על $(0,1)$, אזי $f\in L_1(-1,1)$.

שאלה 2

הוכח את למה של פטו (Fatou) לפי התרשים הבא.

משפט. תהיינה $f_1, f_2, \ldots \in ??$ ו- $f_k(x) - f(x)$ כב"מ. נניח ש- $??$ כב"מ עבור כל k, ו- $?? < \infty$. אזי $f \in ??$ ו- $?? \le \sup ??$.

ההוכחה מבוססת על משפט ההתכנסות המתנוונית:

① תהיינה ... אזי $f\in ??$ ו- $\int f = \lim_k \int f_k$.

הוכחה.

② נגדיר $l_k(x) = ??$, אזי $l_k \in ??$ עבור כל k. אבן, ... ו- ..., לכן $l_k \in ??$ על סמך ?.

③ $\int l_k \le ??$ עבור כל k. אבן, ...

④ $?? \uparrow ??$ מפני ש- ...

⑤ לכן $\int ?? = \lim_k \int ??$ על סמך ?.

⑥ איפוא: ...

שאלה 3

מצא את השגיאה העקרונית בפתרון הנתון. תן פתרון נכון.

בעיה. עבור איזה $\alpha,\beta>0$ הטור

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^{\alpha}\sin^2(k^{\beta}x)}$$

מגדיר פונקציה $f\in L_1[0,1]$?

פתרון.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_k\int_0^1\frac{dx}{1+k^{\alpha}\sin^2(k^{\beta}x)}= \qquad (k^{\beta}x=k^{-\alpha/2}u)$$

$$=\sum_k\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}\int_0^{k^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}\frac{du}{1+k^{\alpha}\sin^2(k^{-\alpha/2}u)}\,.$$

אבל

$$f_k(u)=\frac{1}{1+k^{\alpha}\sin^2(k^{-\alpha/2}u)}\ \underset{k}{-}\ \frac{1}{1+u^2}=f(u)\,,$$

כי $\sin\alpha\sim\alpha$ עבור $\alpha - 0$. לכן

$$f_k \chi_{[0,k^{\frac{\alpha}{2}+\beta}]} \xrightarrow[k]{} f\chi_{[0,\infty)}\ ;$$

$$\int_0^{k^{\frac{\alpha}{2}+\beta}} f_k \xrightarrow[k]{} \int_0^{\infty} f = \arctan u \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

וההתכנסות של הטור

$$\sum_k k^{-(\frac{\alpha}{2}+\beta)} \int f_k$$

שקולה להתכנסות של הטור

$$\sum_k k^{-(\frac{\alpha}{2}+\beta)}\,.$$

איפוא, $f \in L_1$ אם ורק אם

$$\frac{\alpha}{2} + \beta > 1\,.$$

שאלה 4

הוכח שקבוצה $S \subset \mathbb{R}$ היא זניחה אם ורק אם קיימת פונקציה $f \in L_1$ המקיימת

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$$

עבור כל $x_0 \in S$.

שאלה 5

הפרך את הטענה הבאה על ידי דוגמה נגדית.

טענה. תהי $f \in L_1$, ו-

$$\int_a^b f > 0$$

עבור כל a, b המקיימים $0 < a < b < 1$. אזי $f(x) > 0$ כב"מ על $[0,1]$.

0366.2106

סמסטר קיץ, מועד ב', תשנ"ד
תאריך הבחינה: 09.10.94

בחינה בקורס "פונקציות ממשיות"

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהוא.

מכסימום הנקודות האפשרי הוא $5 \cdot 25 = 125$. זכותך לענות על כל שאלה או חלק משאלה שתבחר.
הציון הוא:

$$\text{ציון} = \min(100, \text{סה"כ הנקודות}) .$$

בכל הטענות המוכחות בקורס אפשר להשתמש ללא הוכחה בפתרונות לשאלות 1, 3-5. בפתרון לשאלה 2 אפשר להשתמש בטענות המוכחות לפני הטענה הנתונה.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח או הפרך את כל אחת מן ה-10 הטענות הבאות.

1.1 פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ היא פונקצית מדרגות אם ורק אם היא רציפה כב"מ, אינטגרבילית, וקבוצת הערכים $f(\mathbb{R}^2)$ היא סופית.

1.2 אותו הדבר עבור $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.3 כל פונקציה מן L^{inc} היא חסומה מלמעלה.

1.4 כל פונקציה מן L^{inc} היא חסומה מלמטה.

1.5 אם $f_k \uparrow f$, $\lim_k \int f_k < \infty$, וכל f_k היא פונקצית מדרגות, אזי $f \in L^{\text{inc}}$.

1.6 אם $f_k \uparrow f$, $\lim_k \int f_k < \infty$, וכל f_k שייכת ל- L^{inc}, אזי $f \in L_1$.

1.7 אם $f_k \uparrow f$, $\lim_k \int f_k < \infty$, וכל f_k שייכת ל- L_1, אזי f היא פונקצית מדרגות.

1.8 $\int \chi_S = 0$ אם ורק אם הקבוצה S היא סופית או בת מניה.

1.9 פונקציה חסומה היא מדידה אם ורק אם היא רציפה כב"מ.

1.10 אם קבוצה $S \cap (-1,0)$ סגורה וקבוצה $S \cap (0,1)$ פתוחה, אזי קבוצה $S \cap (-1,1)$ מדידה.

שאלה 2

הוכח את המשפט המבסס את הקיום של אינטגרל על L^{inc} לפי התרשים הבא.

משפט. תהייה $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots$ פונקציות מדרגות על $\mathbb{R}$ או $\mathbb{R}^2$ המקיימות $\lim_k \varphi_k(x) = 0$ כב"ס. אזי ...

ההוכחה מבוססת על משפט של Heine-Borel:

① כל כיסוי (פתוח? סגור?) של קבוצה חסומה (פתוחה? סגורה?) ב- $\mathbb{R}^n$ מכיל תת-כיסוי סופי.

הוכחה.

② נתבונן בשתי קבוצות זניחות: ראשית, ...; שנית, ... עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי ... של ... המקיים .... (יש הבדל בין $\mathbb{R}$ לבין $\mathbb{R}^2$ בסעיף הזה: .... אבל זה לא משנה את העניין כי ....)

③ יהי $\varepsilon > 0$ נתון. עבור כל נקודה שאינה בקבוצה ... קיימת סביבה ... ומספר ... כאלה ש- $\varepsilon > ??$ עבור כל .... (הסביבה היא ... ב- $\mathbb{R}$ ו- ... ב- $\mathbb{R}^2$.)

④ נקח קבוצה אלמנטרית (פתוחה? סגורה?) ... המקיימת .... כל ה-... יחד עם כל ה-... מהווים כיסוי ... של ... על סמך ? בוחרים תת-כיסוי ....

⑤ נקח מספר $N = ??$. אזי $\varphi_N \leq ??$ מפני ש.... לכן $\int \varphi_N \leq ??$.

⑥ איפוא: עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים N המקיים ....

שאלה 3

נתונים שני פתרונות של בעיה אחת. עבור כל אחד מן הפתרונות קבע, האם:

(א) התשובה נכונה והפתרון מבוסס.

(ב) התשובה נכונה, אבל הפתרון דורש נימוק נוסף.

(ג) התשובה לא נכונה והפתרון לא נכון.

במקרה (ב) השלם את הפתרון.

במקרה (ג) ציין את השגיאה העקרונית (אחת מהן, אם יש יותר).

אם הפתרונות שניהם לא נכונים, אז תן פתרון נכון.

בעיה. מצא

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\sin(x/n)}\,dx .$$

פתרון 1.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\sin(x/n)}\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\cdot\frac{x}{n}}\,dx \approx \sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow[n]{} \infty .$$

הקירוב השני מותר כי הפונקציה $(\sin x)/(x\sqrt{x})$ אינטגרבילית על $(0,\infty)$; אכן, $|\sin x| \leq 1$ וגם $|\sin x| \leq x$. הקירוב הראשון מותר לפי הערכת השגיאה הבאה:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}\sin\frac{x}{n}}\,dx-\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}\cdot\frac{x}{n}}\,dx\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi/2}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{n}}-\frac{1}{\frac{x}{n}}\right)dx\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n\pi}{2}\cdot\max_{0\le x\le n\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{n}}-\frac{1}{\frac{x}{n}}\right);$$

אבל

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{n}}-\frac{1}{\frac{x}{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\frac{x}{n}-\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{n}\right)^3+\dots\right)}{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{n}\right)^3+\dots\right)}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{x}{n}\right)^3}{\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}}{6n};$$

מכאן השגיאה חסומה כאשר $n\to\infty$.
איפוא: הגבול הוא אינסוף.

פתרון 2.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}\sin(x/n)}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nu}{\sqrt{u}\sin u}\,du;$$

הפונקציה $f(u)=(\sin nu)/(\sqrt{u}\sin u)$ אינטגרבילית על $(0,\pi/2)$; לכן האינטגרל שואף לאפס על סמך משפט של רימן-לבג (Riemann-Lebesgue).
איפוא: הגבול הוא אפס.

שאלה 4

תהי $f\in L_1(\mathbb{R}^2)$. הוכח שנוסחה

$$F(a,b,r)=\int_{(x-a)^2+(y-b)^2<r^2}f(x,y)\,dx\,dy$$

מגדירה פונקציה רציפה $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

שאלה 5

הפרך את הטענה הבאה על ידי דוגמה נגדית.

טענה. נניח ש- $f_k\to f$ ב- L_1 ו- $(\sup_k|f_k|)\in L_1$. אזי קיימות סדרות מונוטוניות של פונקציות אינטגרביליות $l_1\le l_2\le\dots$, $u_1\ge u_2\ge\dots$ המקיימות $l_k(x)\le f_k(x)\le u_k(x)$ כב"מ, ו- $l_k\to f$ ב- L_1, ו- $u_k\to f$ ב- L_1.
