

סמסו ג' י"ג תמוז, תש"ד
 5.7.1994

אברהם

הבאקולגה למדעים מדויקים
 ז"ש באימנונו אברהם סאקלר

מבחן פונקציות ממשיה
 לתלמידי מתמטיקה, שנים ב', ג'.
 המונה: ד"ר דוד סוכני.

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר אשר נלמד.

חלק א' ענה על אחת מבין השאלות 1, 2.

1. הוכח כי המדד החיצוני והמדד הפנימי ב- \mathbb{R}^n אינו-אקסיומטי.
 להצגה (כלומר, לכל קבוצה A ב- \mathbb{R}^n ולכל $\epsilon > 0$,
 $m^*(A + \epsilon) = m^*(A)$ וכן $m_*(A + \epsilon) = m_*(A)$.

2. יהי $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. יהי f פונקציה מדידה על \mathbb{R}^n , אשר מתאפסת מחוץ ל- E , וכן $0 < f(x) < \epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$.
 הוכח, כי לכל $\epsilon > 0$ יש $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ כן $m\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$.

חלק ב' ענה על שאלות 3, 4, 5, 6.

3. יהי $E \subset \mathbb{R}^n$. נתון כי $m^*(E) = m_*(E) < \infty$. הוכח, כי E מדידה.

4. יהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדידה. יהי f פונקציה אי-שלילית, אינטגרלית על E . נשדד, לכל $r > 0$

$$f_r(x) = r \log \left(1 + \left(\frac{f(x)}{r} \right)^\alpha \right)$$

כאשר α מספר ממשי נתון. הוכח, כי אם $\alpha > 1$, אז
 הפונקציה f_r אינטגרלית על E וכן

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_E f_r = \begin{cases} \int_E f & , \alpha = 1 \\ 0 & , \alpha > 1 \end{cases}$$

נתון היחס שור-3:3:1.

5. תהי f פונקציה אינטגרבילית על \mathbb{R} . יהי סדר $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a |f(\frac{x}{a}+n)| dx$ מתכנס.

ב. הוכח כי האינטגרל $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{a}+n)$ מתכנס, כמעט לכל x ממשי.

ג. הוכח כי סכום האינטגרלים $F(x)$, הלא מחזורי, בקטע $[0, a]$ מחזורי a (כלומר $F(x+a) = F(x)$ כמעט לכל x), וכן F אינטגרבילית על $(0, a)$.

6. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדידה, ותהי סדרת פונקציות מדידות $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ על E .

א. יהי E מדידה, ואז מתכנסת המידה $\int_E |f_k - f| dx$. נניח כי $|f_k| \leq g$ לכל k , כאשר g פונקציה אינטגרבילית על E .

א. הוכח כי f אינטגרבילית על E .

ב. נניח כי $m(E) < \infty$. הוכח כי

$$\int_E |f_k - f| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

ג. הבה $m(E) < \infty$ ונתון כי $\int_E |f_k - f| dx \rightarrow 0$.

בהצלחה!

מבחן פונקציות ממשיות
 לתלמידי מתמטיקה שנים ב', ג'
 המונה: ד"ר דוד סובני

משק המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

חלק א'

ענה על אחת מבין השאלות 1, 2.

1. תהי E קבוצה מדינה (ב- \mathbb{R}^n) ותהי $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ פונקציה אינטגרלית על E אם ורק אם f מדינה כמעט לכל $x \in E$.
 אקומה פונקציה g אינטגרלית על E כך ש $|f(x)| \leq g(x)$.

2. תהי f אינטגרלית על \mathbb{R}^n והי $\epsilon > 0$. הוכח שיש $\delta < \epsilon$, כך שאם g אינטגרלית, אי-שלילית, בעלת תומק קטן סביב הראשי ברדיוס δ , וכן $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$, מתקיים

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - fg| < \epsilon$$

חלק ב'

ענה על שאלות 3, 4, 5, 6.

3. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מדה חזונית סופית. הוכח כי

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A^* = m^*(A), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = m_*(A)$$

4.

תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדינה מקומה $f: E \times V \rightarrow \mathbb{R}$ או לכל $v \in V$, הפונקציה $f(x, v) \rightarrow x$ אינטגרלית על E .

ג. נרשם $v = (v_1, \dots, v_m)$ והי $m \leq j \leq 1$ נתון. נניח כי לכל $x \in E$, הפונקציה $f(x, v) \rightarrow v$ אינטגרלית על E , וכן לכל $v \in V$, הפונקציה $f(x, v) \rightarrow v$ אינטגרלית על E .
 ג. נניח כי יש g אינטגרלית על E כך ש $f(x, v) \rightarrow v$ לכל $x \in E, v \in V$.

(31)

$$\forall v \in V \text{ בר } \frac{\partial}{\partial v_j} F(v) = \int_E \frac{\partial}{\partial v_j} F(x, v) dx$$

5. תהי סדרה קבוצה מניינת $(\mathbb{R}^n - \emptyset)$ $\{E_r\}_{r=1}^{\infty}$ הוכח כי יש $F \subset \mathbb{R}^n$ כגון $\sum_{r=1}^{\infty} m(E_r) < \infty$.

כך $m(F) = 0$, וכן $F \subset \mathbb{R}^n$ (מכאן ברור כי F הוא מסתמי סופי E_r קבוצה E_r (הצורה: עבור x כגון, מסתמי סופי זה יכול להיות אפס).

6. תהי סדרה פונקציונלית $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ על \mathbb{R} נניח כי בר $x \in \mathbb{R}$, המקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$$

הוכח כי סדרה מתכנסת כמעט בר $x \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n'(x) dx \quad \text{וכן}$$

בהצגה!

8.7.1991

מבחן בפונקציות ממשיות
 לתמיזי מתימטיקה שנים ב', ג',
 המוכה: ד"ר דוד סודרי

משק המבחן: 3 שאלות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

חלק א' ענה על אחת מהבין השאלות 1, 2.

1. א. הגדר התכנסות במדה על סדרת פונקציות.
 ב. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה מדינה וגהי $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ סדרת פונקציות מדינות על E , סופיות כבי"ח ומתכנסות במדה לפונקציה f הוכח כי קומת f $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ תת סדרה המתכנסת f - E לקודתית כבי"ח.
2. א. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מדה סופית וגהי f פונקציה מדינה על E , סופית כבי"ח. הוכח שיש סדרת פונקציות $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ במרחב $C_c(\mathbb{R}^n)$ המתכנסת לקודתית f - E כבי"ח.
 ב. יהי $p > 1$ וגהי $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ סדרת פונקציות מ $L^p(\mathbb{R}^n)$ כך ש-

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f_m|^p \rightarrow 0 \quad \text{כך ש} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

הוכח שיש

חלק ב' ענה על e או f מהבין השאלות 3, 4, 5, 6.

3. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדינה וגהי $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ סדרת פונקציות אינטגרבוליות על E . נניח כי $\sum_{k=1}^\infty \int_E |f_k| < \infty$. הוכח כי $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ מתכנס למספר סופי כמעט לכל $x \in E$. הוכח כי $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ פונקציה אינטגרבולית על E וני

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^\infty f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^\infty \int_E f_k(x) dx$$

4. תהי $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה זולה ממש של מספרים סבירים
 יהי h מספר רציונלי. לכל מספר סביר N , נגדו

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h g_n x}$$

א. הוכח כי האינטגרל $\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 |f_{m^2}(x)|^2 dx$ מתכנס.

ב. הראה כי אם $m^2 \leq N < (m+1)^2$, אז

$$|f_N(x) - \frac{m^2}{N} f_{m^2}(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{N}}$$

ג. הסיק, כי כמעט כל $x \in [0,1]$, $f_N(x) \rightarrow 0$ כ- $N \rightarrow \infty$.

5. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. נניח כי יש $0 < \alpha < 1$, כך שכל כדור \bar{B} ב- \mathbb{R}^n מתקיים

$$m^*(A \cap \bar{B}) \leq \alpha m(\bar{B})$$

א. הוכח כי A מדידה ומכאן אז $m(A) = 0$.
 ב. הוכח כי אין $A \subset \mathbb{R}^n$, כך שכל כדור \bar{B} מתקיים

$$m^*(A \cap \bar{B}) = \alpha m(\bar{B})$$

6. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה מדה סופית. תהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה

כונקציות מדידות וסופיות על E , ונניח כי יש לה
 תת סדרה המתכנסת נקודתית לאפס כפי"ח ב- E .

הוכח כי יש סדרה מספרים ממשיים $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-
 $\sum_{k=1}^{\infty} |t_k| = \infty$ וכן $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k(x)$ מתכנס כפי"ח ב- E .

(נימוק: השתמש במשפט אגורוף.)

בהצלחה!