מועד א
סמסטר א'
2.03.01

[...]סיטת תל-אביב
[...]לטה למדעים מדויקים

בחינה בפונקציות ממשיות.
המרצה: פרופ' א. אולבסקי.

משך הבחינה 3 שעות.
חומר עזר: אסור.
ענה על 5 שאלות ומהן על שאלה אחת בין השאלות 1,2.

1. הוכח קיום ויחידות של פונקציה $f\in C[0,1]$ המקיימת
$$\int_0^1 (s-t)^{10} f(t)\,dt = f(s)+1$$
הסבר איך מקבלים קירוב של f עם דיוק נתון.

2. הוכח כי הקבוצה $\{x=\{x_k\} \mid \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x_k^2 \le 1\}$ הינה קומפקט ב-ℓ_2.

3. תהי E - קבוצה מדידה וחסומה ב-$\mathbb{R}^2$. הוכח כי קיים ישר $y=const$ המחלק קבוצה E לשני תתי קבוצות בעלות מידה שווה.
האם זה מתקיים עבור מידה [illegible] ב-$\mathbb{R}^2$?

4. תהי f - פונקציה מדידה ב-$[0,1]$. הוכח כי $\sin(f)\in L^1[0,1]$.

5. הוכח את המשפט של נקודות צפיפות.

6. נניח כי $f_n\to f$ ב-$L^2(\mathbb{R})$. הוכח כי קיימת f_{n_k} המתכנסת ל-f כ.ת.

7. תהי $r(x)=\begin{cases}+1 & 0\le x<\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$ ומשוכפלת ב-$\mathbb{R}$ עם מחזור 1.
נגדיר $r_0(x)=1$, $r_n(x)=r(2^{n-1}x)$, $n=1,2,\dots$.
בדוק כי $\{r_n\}_0^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב-$[0,1]$. האם $\{r_n\}$ הינה ONB?

בהצלחה!

סמסטר ב׳
מועד ב׳
30.08.99

הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בפונקציות ממשיות

המרצה: פרופ׳ א. אולבסקי

משך הבחינה - 3 שעות
חומר עזר - אסור
ענה על 5 שאלות
משקל כל שאלה 20 נק׳

1. הוכח כי קבוצת פונקציות מסוג $f(x)=ax^2+bx+c$ הינה קבוצה דלילה ב- $C[0,1]$.

2. הוכח כי אם f - מדידה אז גם $|f|$ - מדידה. האם ההפך גם נכון?

3. תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ - רציפה! $f\in L[0,\infty)$. האם נובע מזה כי $f\in L^2[0,\infty)$?

4. הוכח כי המרחב $L^2[0,1]$ הינו מרחב שלם.

5. תהי $E\subset[0,1]$ - קבוצה עם מידה אפס. הוכח כי לקבוצה $f(E)$ יש גם מידה אפס, כאשר $f(x)=\sqrt{x}$.

6. האם קיימת קבוצה $E\subset\mathbb{R}$ (מדידה) כך שקבוצה של נקודות צפיפות שלה הינה ריקה?

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

מועד א'
סמסטר ב'
1999
14.7.99

בחינה בפונקציות ממשיות.
המרצה: פרופ' אולבסקי

משך הבחינה 3.5 שעות.
חומר עזר - אסור.
משקל של כל השאלה 14 נק'
+ שתי נקודות בונוס.
נמק את תשובתך.

1. האם קבוצה $\{f\in C(I): \int_I f(x)dx=0\}$ הינה קבוצה סגורה?
האם קבוצה $\{f\in L^2(I): \int_I f(x)dx=0\}$ הינה קבוצה סגורה?

2. בדוק כי המשפחה $S=\{\emptyset,[0,1),[1,2],[0,2]\}$ הינה σ-אלגברה במרחב $\Omega=[0,2]$. האם פונקציה $\mathbb{1}_{[0,1]}$ מדידה ביחס ל- S?

3. תהי $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(x\in\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:
א) f - מדידה לבג.
ב) $f\in L^1(\mathbb{R})$.
ג) $f\in L^2(\mathbb{R})$.

4. תהי $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ - סדרה של מספרים ממשיים. הוכח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\mathbb{1}_{[t_k,t_k+\frac{1}{k}]}$ מתכנס כ.ת.

5. הוכח כי אם $f_n \xrightarrow{L^1[0,1]} f$ אז $f_n \xrightarrow{\text{במידה}} f$. האם להיפך גם נכון?

6. הוכח כי כל פונקציה מונוטונית גזירה כ.ת.

7. האם פונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$?

סמסטר ב'
10.7.1998

...קולטה למדעים מדויקים

בחינה בפונקציות ממשיות

המרצה: פרופ' א.אולבסקי

...משך הבחינה: 3.5 שעות.
...חומר עזר: אסור.
...און ככל יכולתך.
...שקל של כל השאלה 23 נק'

(1) הוכח כי הקבוצה $E=\{f: \int_{[0,1]} f(t)\,dm>0\}$ פתוחה ב-$L^2[0,1]$.
מצא את הסגור שלה.

(2) א) הוכח משפט לבג על התכנסות דומיננטית ב- $[0,\infty)$.
ב) חשב את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x}\sin^n x\,dx$.

(3) נניח $f_n(x)$ - סדרה של פונקציות מדידות אי-שליליות מוגדרות על $\mathbb{R}$.
הוכח כי הפונקציה $f(x)=\inf_n f_n(x)$ - מדידה.

(4) רשום הגדרה והוכח את המשפט על פונקציה מקסימלית.

(5) נניח E - תת קבוצה של $\mathbb{R}$ עם מידה חיובית. הוכח כי קיימים
מספרים $x,y,z\in E$ כך ש- $y=\frac{x+z}{2}$.

בהצלחה!

אוניברסיטת ת"א
הפקולטה למדעים מדויקים

מועד מיוחד
סמסטר ב' תשנ"ו

1.11.96

מתמט

בחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' ש. שטולבקי

משך הבחינה: 3.5 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר
פתור ככל יכולתך
כל שאלה 22 נקודות.

1) הוכח את משפט הקטגוריה של בר.

2) הוכח את משפט הכיסוי של ויטלי.

3) נתונה הקבוצה הבאה במרחב $L^2[0,1]$: $E=\{f \mid \int_{[0,1]} f\,dx = 0\}$

i) האם היא פתוחה?

ii) האם היא סגורה?

iii) האם היא צפופה?

iv) האם היא קמורה?

4) הראה שהמרחב $L^2(\mathbb{R})$ ספרבילי.

5) תן דוגמא לפונקציה בעלת השתנות חסומה, שאינה רציפה בהחלט.

בהצלחה!

2

מועד ב' סמסטר ב'
1.9.97

אוניברסיטת ת"א
הפקולטה למדעים מדויקים

בחינת מבוא בפונקציות ממשיות
המרצה: פרופ' ל. אולבסקי.

משך הבחינה: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר. כל שאלה שווה 23 נקודות.

1. מצא את הסגור של הקבוצה הבאה
$$E = \{ f\in C[0,1] : f(\tfrac{1}{2})=0 \}$$
במרחבים $C[0,1]$ ו- $L^2[0,1]$.

2. נסח והוכח את משפט יגורוף.

3. תהי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות על $[0,1]$, $0\le f_n(x)\le 1$ המתכנסת ל- f במידה. האם מכאן נובע בהכרח ש- $f_n\to f$ ב- $L^2[0,1]$?

4. מצא את כל נקודות הצפיפות של הקבוצה $\{(x,y) : |y|\ge x^2\}$ ב- $\mathbb{R}^2$.

5. עבור אילו ערכים של α הפונקציה $f(x)=x^\alpha \sin(\frac{\pi}{x})$ היא רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$.

מועד מיוחד
סמסטר ב' תשנ"ו
4.11.96
מתמ'

אוניברסיטת ת"א
הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' ש. שולסבקי

משך הבחינה: 3.5 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר
פתור ככל יכולתך
כל שאלה 22 נקודות.

1) הוכח את משפט הקטגוריה של בר.
2) הוכח את למת הכיסוי של ויטלי.
3) נתונה הקבוצה הבאה במרחב $L^1[0,1]$: $E=\{f \mid \int_{[0,1]} f\,dx=0\}$
i) האם היא פתוחה?
ii) האם היא סגורה?
iii) האם היא צפופה?
iv) האם היא דלילה?
4) הראה שהמרחב $L^2(\mathbb{R})$ ספרבילי.
5) תן דוגמא לפונקציה בעלת השתנות חסומה, שאינה רציפה בהחלט.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

מועד א 29.1.97
סמסטר א
תשנ"ז
366.2106.01

בחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' א. אולבסקי

משך הבחינה: 35 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר
...ר ככל יכולתך
...שאלה 23 נקודות.

1. במרחב ℓ_2 תהי E קבוצת כל הסדרות x_k כך ש- $x_k=O(\frac{1}{k})$. האם נכון ש-
   א. E פתוחה?
   ב. E סגורה?
   ג. E מהקטגוריה הראשונה?

2. הוכח שלכל פונקציה מדידה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ קיימת סדרה של פונקציות רציפות $f_n\in C([0,1])$ המתכנסת ל- f a.e.

3. תהי $f\in L(\mathbb{R})$. הוכח שכמעט לכל x $\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$ מתכנס.

4. הוכח את משפט לבג לגבי גזירות האינטגרל.

5. תהי $f\in AC([0,1])$. הוכח ש-
$$\mathrm{Var}\, f=\int_{[0,1]}|f'|\,dx$$

בה'

אוניברסיטת תל אביב — מועד א' סמסטר א' תשנ"ו

הפקולטה למדעים מדויקים — 14.2.96

מספר קורס: 0366.2106.01

בחינת מעבר בפונקציות ממשיות

לתלמידי מתמטיקה

המורה: פרופ' של אולבסקי

משך הבחינה: 3.5 שעות

אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענה ככל יכולתך

לבחור נכונה 2 שאלות מובטחות 60 נקודות

לבחור נכונה 3 שאלות מובטחות 80 נקודות

לבחור נכונה 4 שאלות מובטחות 95 נקודות

לבחור נכונה 5 שאלות מובטחות 100 נקודות

1. יהי X מרחב כל הפונקציות הרציפות על $\mathbb{R}$, עם הנורמה $\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. תהי E תת-קבוצה של X המורכבת מכל הפונקציות בעלות תומך קומפקטי.

i) האם E פתוחה?

ii) מצא את E ב- X.

iii) האם E קבוצה מקטגוריה הראשונה?

2. הוכח כי המרחב $L(\mathbb{R})$ שלם.

3. עבור $f\in L(\mathbb{R})$ נסמן $f_h(x)=f(x+h)$. הוכח ש- $f_h\in L(\mathbb{R})$ וש- $f_h\to f$ במטריקה של $L(\mathbb{R})$.

4. הוכח את משפט נקודות הצפיפות של לבג.

5. תהי $E\subset[0,1]$, $mE>0$, קבוצה נתונה. הוכח שניתן למצוא ב- E קבוצת נקודות $\{a_j\}$ $(1\le j\le 1996)$ המהווה סדרה חשבונית.