מועד ב' סמ' א' תשס"ד
30.06.04

בחינה בפונקציות ממשיות
מרצה: פרופ' דני לויתן

- משך הבחינה שלוש שעות
- אין להשתמש בחומר עזר

ענה על ארבע מחמש השאלות הבאות:

שאלה 1

א. הגדירו את המדה החיצונית של לבג ומתי קבוצה מדידה לבג.

ב. הוכיחו כי אוסף הקבוצות המדידות לבג הוא σ - אלגברה.

שאלה 2

א. הגדירו את המושג פונקציה רציפה בהחלט ב- $[a,b]$

ב. הוכיחו כי f רציפה בהחלט ב- $[a,b]$ אםם היא אינטגרל (כפונקציה של הקצה העליון) של פונקציה אינטגרבילית.

שאלה 3

א. הוכיחו כי אם f מדידה וחסומה על E מדידה, אז

$$\sup_{\varphi \le f} \int_E \varphi = \inf_{\psi \ge f} \int \psi$$

(φ ו- ψ - פשוטות)

ב. מצאו פונקציה $f \ge 0$ כך, ש- $g \le f$ ו- g מדידה

$\Leftarrow \int_0^1 g = 0$ ו- $g \ge f$ ו- g מדידה $\Leftarrow \int_0^1 g \ge 1$.

שאלה 4

א. חשבו

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx .$$

נא להסביר על מה מסתמכים.

ב. יהי $1 \le p < \infty$ ויהיו $f_n, f \in L_p[0,1]$. אם $f_n \to f$ כב"מ ב- $[0,1]$ ו- $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

הוכיחו כי $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f ב- L_p

שאלה 5

א. הגדירו את המושג $\{f_n\}$ מתכנסת במידה ל- f .

ב. נסחו והוכיחו את קריטריון קושי לחתכנסות במידה.

בהצלחה!

סמסטר ב', מועד א', תש"ס
תאריך הבחינה: 28.6.2000

<u>הבחינה בפונקציות ממשיות</u>
<u>המורה: פרופ' דני לויתן</u>

משך הבחינה: שלוש שעות.
ענה על שלוש מארבע השאלות.
ללא חומר עזר.

<u>שאלה 1</u>

א. תהי m^* המידה החיצונית של לבג על הישר. הגדר את המושג E מדידה לבג, והוכח קיום קבוצה שאינה מדידה.

ב. תן דוגמא של סדרת קבוצות A_i על הישר בעלות התכונות $A_i \supseteq A_{i+1}$ לכל i $m^*A_1 < \infty$

ו- $m^*(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) < \lim_{i\to\infty} m^* A_i$

<u>שאלה 2</u>

א. נסח והוכח את הלמה של פאטו להתכנסות כב"מ.

ב. הוכח כי אם $f_n, f \in L^p,\ 1 \le p < \infty$, $f_n \to f$ כב"מ, אז $f_n \to f$ ב- L^p

אםם $||f_n||_p \to ||f||_p$

<u>שאלה 3</u>

א. הגדר את המושג f רציפה בהחלט ב- $[a,b]$ והוכח כי אם f רציפה בהחלט ו- $f' = 0$ כב"מ אז f קבועה בקטע.

ב. נסח והוכח את אי שוויון ינסן.

<u>שאלה 4</u>

א. נסח את משפט פוביני והראה ע"י דוגמא כי תנאי האינטגרביליות הכרחי לקיום המשפט.

ב. קח כנתון שאם f מדידה על הישר אז $F(x,y) := f(x-y)$ מדידה במישור. הוכח כי אם $f,g \in L(-\infty,\infty)$ אז עבור כמעט כל x הפונקציה $\varphi(y) := f(x-y)\,g(y)$ אינטגרבילית

והפונקציה $h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$ שייכת ל $L(-\infty,\infty)$.

סמסטר ב׳, מועד א׳, תשנ״ז
תאריך הבחינה: 9.6.97
מספר הקורס: 03662106

<u>הבחינה בפונקציות ממשיות</u>
<u>המורה: פרופ׳ דני לויתן</u>

משך הבחינה: שלוש שעות.
ענה על שלוש מארבע השאלות הבאות:

<u>שאלה 1</u>

א. הגדר את המושגים $E \subseteq R$ מדידה לבג ו- $E \subseteq R$ קבוצת בורל.

ב. הוכח כי קיימת קבוצה שהיא מדידה לבג ואינה קבוצת בורל; וכי קימת קבוצה שאינה מדידה לבג.

<u>שאלה 2</u>

א. נסח והוכח את הלמה של פאטו.

ב. יהי $1 \le p < \infty$ ויהיו $f, f_n \in L^p$ הוכח כי אם $f_n(x) \to f(x)$ כב״מ ו- $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ אז $f_n \to f$ ב- L^p.

<u>שאלה 3</u>

א. הגדר את המושגים התכנסות כב״מ התכנסות במידה ותן דוגמא לסדרה המתכנסת המידה ואינה מתכנסת בשום מקום.

ב. נסח והוכח את משפט יגורוב.

<u>שאלה 4</u>

א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה ופונקציה רציפה בהחלט והוכח כי אם f רציפה בהחלט ב $[a, b]$ אז כך גם ההשתנות של f שם.

ב. הוכח כי פונקציה ממשית ומונוטונית ב $[a, b]$ היא גזירה כב״מ שם ונגזרתה אינטגרבילית.

ב ה צ ל ח ה !!!!

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר ב' תשמ"ז
1.7.87

פונקציות ממשיות

לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג

המורה: פרופ' ד. לויתן

משך הבחינה: 3 שעות

ענה על שלוש מארבע השאלות הבאות.

שאלה 1

א. הגדר את המושג קבוצה מדידה (לבג) והוכח כי אוסף הקבוצות המדידות מהווה σ-אלגברה.

ב. הוכח קיום קבוצה מדידה לבג שאינה מדידה בורל.

שאלה 2

א. הגדר את המושג פונקציה מדידה והוכח כי f חסומה היא אינטגרבילית אםם היא מדידה.

ב. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות ואי שליליות. הוכח

$$\int \underline{\lim}\, f_n \le \underline{\lim} \int f_n .$$

שאלה 3

א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ ופונקציה רציפה בהחלט ב- $[a,b]$. הוכח כי אם f רציפה בהחלט ב-$[a,b]$ ו- $f'=0$ כב"מ אז $f\equiv C$.

ב. תהי $A\subseteq[0,1]$ מדידה $\alpha>0$ ונניח כי לכל קטע $I\subseteq[0,1]$ $m(A\cap I)\geq\alpha mI$. הוכח $mA=1$.

שאלה 4

א. הגדר את המרחב $L^p(E)$, $1\le p\le\infty$ והוכח שהוא מרחב נורמי.

ב. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות ב- L^p $1\le p<\infty$ המתכנסת כב"מ ל- f ב L^p. הוכח כי $f_n\to f$ ב- L^p אםם $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$.

בהצלחה!!!

20.7.87 פונקציות ממשיות

מועד ד'

משך הבחינה 3 שעות. הבחינה ללא חומר עזר.

ענה על שלוש מארבע השאלות.

1. א. הגדר את המושגים קבוצה מדידה לבג וקבוצה מדידה בורל. ב. יהי f מדידה לבג. הוכח כי המקור על ידי f של קבוצה מדידה בורל היא מדידה, ג. האם נכון שהמקור על ידי f של קבוצה מדידה לבג הוא מדידה? הוכח טענותיך.

2. א. הגדר את המושגים התכנסות כ"ת והתכנסות במידה, הוכח כי התכנסות כ"ת אינה גוררת התכנסות במידה (התכנסות במידה אינה גוררת התכנסות כ"ת). ב. יהי g אינטגרבילית על E ויהיו f_n מדידות על E כך ש- $|f_n| \le g$ כ"ת על E. הוכח

$$\int_E \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_E f_n \le \overline{\lim} \int_E f_n \le \int_E \overline{\lim} f_n$$

3. א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה ופונקציה רציפה בהחלט. הוכח כי פונקציה ממשית מונוטונית ב-$[a,b]$ היא בעלת השתנות חסומה שם. ב. יהי f רציפה בהחלט ב-$[a,b]$. הוכח כי f פונקציית אינטגרל [illegible] f' [illegible] ב-$[a,b]$.

4. א. הגדר את המרחבים $L^p(E)$, $1 \le p \le \infty$, והוכח כי הם שלמים. ב. יהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות ב-L^p, $1 \le p < \infty$, המתכנסת כ"ת ל-f ב-L^p. הוכח כי $f_n \to f$

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר א' תשמ"ז
19.2.87

פונקציות ממשיות
לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' ד. לויתן

משך הבחינה: 3 שעות
ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

שאלה 1

א. הגדר את המושגים קבוצה מדידה ופונקציה מדידה, והוכח כי יש קבוצה שאינה מדידה.
ב. העזר בפונקצית קנטור להוכיח כי המקור של קבוצה מדידה על ידי פונקציה מדידה $(f^{-1}(A))$ אינו בהכרח מדיד.

שאלה 2

א. הגדר את המושגים התכנסות כב"מ, התכנסות במדה והתכנסות בממוצע (ב-L').
נסח והוכח שלושה משפטים על הקשרים בין סוגי ההתכנסויות הנ"ל לפי בחירתך.

ב. תהי g אינטג. על E ונניח כי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות כך ש- $|f_n| \le g$ כב"מ על E.
הוכח

$$\int_E \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_E f_n \le \overline{\lim} \int_E f_n \le \int_E \overline{\lim} f_n$$

שאלה 3

א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה ופונקציה רציפה בהחלט, והוכח כי פונקציה רציפה בהחלט שנגזרתה $= 0$ כב"מ ב- $[a,b]$ קבועה שם.

ב. תהי f בעלת השתנות חסומה ב- $[0,1]$ ורציפה בהחלט ב- $[\varepsilon,1]$ לכל $\varepsilon>0$.
האם f רציפה בהחלט ב- $[0,1]$. אם כן הוכח, אם לא הראה דוגמא נגדית.

שאלה 4

א. הגדר את המרחבים $L^p(E)$, $1 \le p \le \infty$ והוכח כי הם מרחבים שלמים.

ב. תהי $\{f_n\}$ סדרה ב- L^p $1 \le p < \infty$ המתכנסת כב"מ
ל- $f \in L^p$. הוכח $f_n \to f$ ב- L^p אםם
$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

בהצלחה!!!

TEL-AVIV UNIVERSITY
Department of Mathematical Sciences
Division of Applied Mathematics

...טת תל-אביב
...דעי המתמטיקה
...מתמטיקה שמושית

(36)

...לה: פונקציות ומידות

...התכונות הבאות

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\int \frac{\sin nx}{nx}dx$$

$mE=0$.

RAMAT-AVIV, TEL-AVIV, TEL. 42 01 11 ...ית האוניברסיטה, רמת-אביב, תל-אביב, טל.

TEL-AVIV UNIVERSITY
Department of Mathematical Sciences
Division of Applied Mathematics

ת תל-אביב
: המתמטיקה
ועיקה שמושית

(37)

: פונקציה מונוטונית עולה ב-$[a,b]$ אינטגרבילית בה

.[illegible] אינטגרבילית

.דוגמא של f מונוטונית עולה כך ש-

$$\int_a^b f' < f(b) - f(a)$$

RAMAT-AVIV, TEL-AVIV, TEL. 42 01 11 קרית האוניברסיטה, רמת-אביב, תל-אביב, טל.

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר א' תשמ"ג
16.2.83

34

פונקציות ממשיות
לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' ד. לויתן

משך הבחינה: 3 שעות

אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על השאלות הבאות:

שאלה 1

א. הגדר את המושגים הבאים: התכנסות כב"מ, התכנסות במידה והתכנסות בממוצע.

ב. מהם יחסי הגרירה בין סוגי ההתכנסות הנ"ל- נסח והוכח שלושה יחסי גרירה בין הנ"ל.

שאלה 2

א. תאר ללא הוכחות את השלבים השונים של הגדרת אינטגרל לבג תוך ציון התכונות העיקריות המתקבלות בכל שלב.

ב. תן דוגמא של פונקציה שאינה אינטגרבילית לבג אבל עבורה קיים אינטגרל רימן לא אמיתי. הוכח כי אם f אינטגרבילית לבג וקיים עבורה אינטגרל רימן לא אמיתי אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

שאלה 3

א. הגדר את המושג רציפות בהחלט והוכח כי f היא רציפה בהחלט אמם היא האינטגרל הבלתי מסוים של נגזרתה.

ב. תהי f רציפה בהחלט ב- $[\varepsilon, 1]$ לכל $\varepsilon>0$ ונניח כי f רציפה ב-0. הראה על ידי דוגמא כי f אינה בהכרח רציפה בהחלט ב- $[0,1]$ לעומת זאת אם נוסיף כהנחה ש- f בעלת השתנות חסומה ב- $[0,1]$ הוכח כי f אכן רציפה בהחלט ב- $[0,1]$.
(רמז: קח כנתון שפונקציה רציפה בעלת השתנות חסומה היא בעלת השתנות רציפה).

35

הגדר את המושגים מדה חיצונית, קבוצה מדידה ופונקציה מדידה.

הוכח כי אם f מדידה וממשית ו- g רציפה על $(-\infty,\infty)$
אז $g\circ f$ מדידה.

בהצלחה!!!