

הבחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים, ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון ועל שתי שאלות מהחלק השני.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, מספיק לרשום את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. בהנחה כי f מדידה וחסומה הוכח כי

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

כבי"מ ב- $[a, b]$. לאחר מכן, קבל אותה מסקנה בהנחה כי f אינטגרבילית על $[a, b]$.

שאלה 2 (35 נקודות)

יהיו (X, Σ, μ) מרחב מדידה ו- $1 \leq p \leq \infty$. הוכח כי המרחב $L^p(X, \Sigma, \mu)$ שלם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$. הוכח כי קיימות פונקציות רציפות h, g על $[a, b]$ המקיימות: $g+h=f$, רציפה בהחלט, h בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ ו- $h=0$ כבי"ב- $[a, b]$. הראה כי אם גם $g_1+h_1=f$ הוא פירוק כנייל אזי $g-g_1$ פונקציה קבועה.

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ מניה של קבוצת כל המספרים הרציונליים. עבור כל k טבעי נגדיר

$$f_k(x) = \begin{cases} (x - I_k)^{-1/2}, & I_k < x \leq I_k + 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכח כי $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_k$ מתכנס כבי"ב על \mathbb{R} ולפונקציה אינטגרבילית f המקיימת: לכל קטע (a, b) ולכל ϵ מתקיים

$$m((a, b) \cap \{x: f(x) \geq \epsilon\}) > 0.$$

שאלה 3 (35 נקודות)

א. תהיינה f פונקציה אינטגרבילית על מרחב מידה (X, Σ, μ) ו- $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על X המקיימות $|g_n(x)| \leq 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in X$. הוכח כי אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |g_n(x)| d\mu(x) = 0$$

אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f(x) g_n(x)| d\mu(x) = 0.$$

ב. הוכח כי $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בהחלט על $(0, \infty)$.

ב ה צ ל ח ה !!

מספר 38/מ"א
 תל אביב

9.6.99

הג'רד הבונק (י"א) משה

של הבניין: לואל לאל - אולי
 אברהם של... חלקים... של...
 כדאי... ואל... של...
 אין צורך... אולם...
 אולם... מספר...
 אין... משה... ע"כ.

חלקי...
 ע"כ... משה... מספר...

משה (40) (ב/א/א)
 באר (באר) (י"א): $E \in \mathbb{R}$ בעלת מ"מ
 ח"ב... סוף... F ... קטע...
 E ... $\epsilon < \epsilon$... קטע...
 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{N}}$... $\frac{1}{N}$...
 $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \epsilon$.

משה (40) (ב/א/א)
 י"א... קטע...
 בונק... י"א...
 באר... משה...

השקפה
ערכי שליליים - האבד

למסדה 1 (35) נקרא f פונקציה רציפה על $[0,1]$.
אם $M \in \mathbb{R}$ ו- $|f'(x)| \leq M$ לכל $x \in [0,1]$. האם נכון ש
 $E \subset [0,1]$ מדידת אורך $f(E)$ מדידת אורך
 $m(f(E)) \leq M m(E)$?

למסדה 2 (35) נקרא f פונקציה רציפה על $[0,1]$.
האם נכון ש $\int_0^1 (f(x))^n dx$
מדידת אורך f מדידת אורך $[0,1]$

קבוצה E מדידת אורך $f = x^2$
קבוצה E מדידת אורך $f = x^2$
קבוצה E מדידת אורך $f = x^2$

למסדה 3 (35) נקרא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אם $E \subset \mathbb{R}$ מדידת אורך $f(E)$ מדידת אורך
 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \in E\}$ מדידת אורך \mathbb{R}^2
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה $f(x-y) = f(x) - f(y)$
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה $f(x-y) = f(x) - f(y)$

בהתאמה

בחינה בתורת הפונקציות הממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים: ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון ועל שתי שאלות מהחלק השני. אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, די לרשום את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד.

שאלה 1 (40 נקודות)

תאר תהליך בניית האינטגרל לפי לבג (בהנחה כי מרחב המידה נתון מראש) הוכח את הלמה של פטו ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.

שאלה 2 (40 נקודות)

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. נסח את אי שוויונות הולדר ומינקובסקי ותאר את בנית המרחבים $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. הוכח את שלמותם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה אינטגרבילית לפי לבג על \mathbb{R} . יהי $0 < \epsilon$. הוכח כי קיימת פונקציה רציפה φ על \mathbb{R} המתאפסת מחוץ לקטע חסום והמקיימת

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f - \varphi| d\mu < \epsilon.$$

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי f אינטגרבילית לפי לבג על \mathbb{R} . עבור $t \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin tx \, dx.$$

הוכח כי \hat{f} רציפה על \mathbb{R} .

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = 0.$$

שאלה 3 (35 נקודות)

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה סופי ותהיינה $f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ פונקציות מדידות על X . הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה ל- f . אם ורק אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu = 0.$$

שאלה 4 (35 נקודות)

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בהחלט על $[a, b]$ המתכנסת נקודתית

לפונקציה בעלת השתנות חסומה f . נניח כי לכל n טבעי ולכל $a \leq x \leq y \leq b$ מתקיים

$$f_n(y) - f_n(x) \leq f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x).$$

הוכח כי f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ ו

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' = f'$$

כבי"מ.

ב ה צ ל ה !!!

מחנך
0366-2106

תאריך

בחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שלושה חלקים.
ענה על שאלה אחת מכל חלק.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

1. (40 נקודות) תהי μ מידה על אלגברה של קבוצות \mathcal{A} . תן סקירה כללית על תחליך החמשכה של μ למידה על σ -אלגברה. הוכח כי אם σ -סופית אזי החמשכה של μ ל- σ אלגברה הנוצרת ע"י \mathcal{A} היא יחידה.

2. (40 נקודות) תהי f פונקציה לא יורדת בקטע $[a, b]$. תן סקירה כללית של הוכחות המשפט: f' קיימת כמעט בכל מקום. הוכח כי f' אינטגרבילית על $[a, b]$.

$$\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a).$$

חלק ב'

1. (40 נקודות) תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על (X, Σ, μ) . הוכח כי אם
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$$
 אזי $\{f_n\}$ מתכנסת לאפס כמעט בכל מקום.

2. (40 נקודות) א. הוכח כי אם ψ^2 מדידה ו- $\{\chi : \psi(\chi) > 0\}$ מדידה אזי גם ψ מדידה (ψ פונקציה ממשית על מרחב מדיד).

ב. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על מרחב המידה (X, Σ, μ) המתכנסת לאפס כביים. עבור $x \in X$ נסמן

$$g_n(x) := \max \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

ניח כי קיים קבוע $M > 0$ המקיים $\int_X g_n d\mu \leq M$ לכל n .

טבעי. הוכח כי g אינטגרבילית וכי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 0.$$

1. (30 נקודות) תהי $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת;
 א. לכל $t \in [0,1]$ הפונקציה $x \rightarrow f(x,t)$ אינטגרבילית על $[0,1]$;

ב. בכל נקודה $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$ קיימת הנגזרת החלקית
 $g(x,t) := \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$;

ג.

$$M := \sup \{ |g(x,t)| : 0 \leq x, t \leq 1 \} < \infty$$

חוכה כי הפונקציה

$$F(t) := \int_0^1 f(x,t) dx$$

גזירה ב $[0,1]$ וכי

$$F'(t) = \int_0^1 g(x,t) dx, \quad 0 \leq t \leq 1$$

2. (30 נקודות) יהיו (X, Σ, μ) מרחב מידה סופי, $1 < p < \infty$ - פונקציה אינטגרבילית, נניח כי קיים קבוע M עבורו

$$\left| \int_X g \psi d\mu \right| \leq M \|\psi\|_p$$

לכל פונקציה מדידה חסומה ψ

תהי $\{\chi_n\}$ סדרה לא יורדת של פונקציות פשוטות אי שליליות השואפת

ל- $|g|^2$ (נסמו $q := 1 - \frac{1}{p}$)

$$\psi_n := (\chi_n)^{1/p} \operatorname{sign} g$$

חוכה

$$\int_X \chi_n d\mu \leq \int_X \psi_n g d\mu \leq M \left[\int_X \chi_n d\mu \right]^{1/p}$$

וחסק מכאן כי $g \in L^2$.