בחינה בפונק' ממשיות (תשס"ו)

מועד א'

המורה: אלי גלסנר

משך הבחינה שלש שעות. השימוש בחומר עזר אסור

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות

(1) (א) הוכיחו את משפט בורל קנטלי:

תהי $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות חלקיות של $[0,1]$

μ מידת לבג:

(i) אם $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) < \infty$ אזי $\mu(\liminf_{i\to\infty} A_i)=0$

(ii) אם הסדרה $\{A_i\}$ בלתי תלויה אזי

$$\mu(\limsup_{i\to\infty} A_i)=1 \Leftarrow \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\infty$$

(2) תהי $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ מקיימת

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}<\infty$ אזי $\mu(A)=0$ כאשר

$$A=\left\{x\in[0,1]: \frac{1}{q\varphi(q)}>\left|x-\frac{p}{q}\right|\right\}$$

לא. השויון

יש אינסוף פתרונות $\frac{p}{q}$

p, q שלמים זרים ; $0<p$

$\cancel{\mu(A) \geq}\ 1$

(2)

(1) הראו כי אם $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה לבג

ובעלת מידה חיובית, $\mu(A) > 0$, אזי

הקבוצה

$$D(A) = \{x - y : \quad x, y \in A\}$$

מכילה קטע.

(2) תהי $E \subset \mathbb{R}$ מדידה לבג ומקיימת:

$\mu((E+x) \triangle E) = 0$ לכל x רציונלי.

הראו כי $\mu(E) = 0$ או $\mu(\mathbb{R} \setminus E) = 0$.

3) (א) נסחו את משפט איגורוף.

על סמך משפט איגורוף הוכיחו את משפט לוזין:

פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ היא מדידה אמ"מ היא כמעט רציפה (כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת קב' סגורה $F\subset[0,1]$ כך ש $\mu(F)>1-\varepsilon$! $f|_F$ רציפה).

(ב) הראו קיום:

(i) קב' מדידה לבג E ופונקציה רציפה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $g(E)$ אינה מדידה לבג.

(ii) שתי פונקציות מדידות לבג $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהרכבן $F\circ G$ אינו מדיד לבג.

(iii) קבוצה מדידה לבג אך לא בורל.

4 (א) הוכיחו את משפט דיני:

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות סופיות מוגדרות על ידי וגזירות בקטע $[0,1]$. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ מתכנס כ.ת. אז קיים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$

הסיקו את המשפט הבא:

אם f אינטגרבילית ב $[0,1]$ אז הפונקציה

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

גזירה כ.ב. ומתקיים השוויון $\varphi'(x) = f(x)$ כ.ת.

(ב) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מניה של המספרים הרציונליים בקטע $[0,1]$ הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x-a_n|}}$$

מתכנס כ.ת.

בהצלחה

מבחן בפונקציות ממשיות (תשנ"ג, סמסטר ב') מועד א'

משך המבחן 3 שעות.

(ללא חומר עזר)

חלק I (60%) הוכיחו אחת מתוך 3 הטענות הבאות.

1) אם $E \subset \mathbb{R}$ מדידה בעלת מידה חיובית אז הקבוצה $A=\{x-y;\ x,y\in E\}$ מכילה קטע לא מנוון.

2) הסדרה $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא בסיס ל $L_2(\mathbb{T})$.

3) תהיינה f_k, f ב L_1 כך שמתקיים $f_k \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ הוכיחו כי

$\|f_k - f\|_1 \longrightarrow 0$ אם"ם $\|f_k\|_1 \to \|f\|_1$.

(הדרכה: הניחו קודם כי $f_k \geq 0$ והשתמשו בנוסחה

$$|f-f_k| = f+f_k - 2\min(f_k,f).$$

אח"כ השתמשו בפירוקים: $f=f^+-f^-$, $f_k=f_k^+-f_k^-$).

מבחן. בפונק' ממשיות (מועד א')

חלק II (60)

הוכיחו או הפריכו 3 מן הטענות הבאות:

1) אם f_n מדידות ו- $f_n \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ אז f מדידה.

2) $A\subset[0,1]$ מדידה וקיים $0<y<|A|$ אז קיימת $A\supset B$ מדידה סגורה $y=|B|$.

3) אם f רציפה בהחלט ו- A קבוצה בעלת מדה אפס אז $f(A)=\{f(x): x\in A\}$ בעלת מדה אפס.

4) $L_\infty(\mathbb{R})$ מרחב בנך ספרבילי.

בהצלחה

1.9.93

<u>מבחן בפונקציות ממשיות</u> (תשנ"ג סמסטר ב' $\boxed{\text{מועד ב'}}$)

פרופ' גלזנר

משך המבחן 3 שעות

(בלי חומר עזר)

(60%) <u>חלק I</u> פתרו שתיים מתוך 3 השאלות הבאות

1) אם $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ וקיימת $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ כך שלכל n $|f_n| \le \varphi$ אז $f_n \to f$ כמעט במידה שווה.

2) לכל קבוצה מדידה E בעלת מידה חיובית יש קבוצה חלקית בלתי מדידה.

3) נסחו והוכיחו את למת הכיסוי של ויטלי.

מבחן בפונקציות ממשיות ($\boxed{\text{מועד ב'}}$)

חלק II הוכיחו או הפריכו 3 מן הטענות הבאות

1) יהי f מדידה על $[0,1]$ ומקיימת $f|_{[\varepsilon,1]} \in L_1[\varepsilon,1]$ לכל $0<\varepsilon\le 1$, אזי גם $f \in L_1[0,1]$.

2) כל פונקציה רציפה ובעלת נגזרת סופית על קטע $[a,b]$ מקיימת

$$f(b)-f(a)=\int f'(t)\,dt.$$

3) $f_n \xrightarrow{L_2} f \Longrightarrow f_n \to f$ במידה.

4) A הינה מדידה אם"ם לכל V פתוחה

$$|V| = |V\cap A|_e + |V\setminus A|_e .$$

(הניחו כי קריטריון קרתאודורי למדידות ידוע)

בהצלחה.

(84)

בחינה בפונקציות ממשיות (מועד ב' תש"ן)

המורה אלי גלנט

משך הבחינה 4 שעות ללא שימוש בחומר עזר

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות

להלן m = מידת לבג.

4 (1) הוכח או הפרך את הטענות הבאות.

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה; $A\subset\mathbb{R}$ מדידה אזי
גם $f(A)$ מדידה.

(ii) תהא $E\subset\mathbb{R}$ מדידה ומקיימת

$$x,y\in E \Rightarrow x+y,\ x-y\in E$$

אזי $E=\mathbb{R}$ או $m(E)=0$.

(iii) f מוגדרת על $[0,1]\times[0,1]$ ומקיימת: $f(x,y)$ אינטגרבילית
כפונקציה של y לכל x קבוע וכן $\frac{\partial f}{\partial x}$ הינה פונקציה
חסומה על הריבוע. אזי $\frac{\partial f}{\partial x}$ מדידה ב-y לכל x ק'
ומתקיים:

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy.$$

(iv) תהא f_n רציפות על $[0,1]$; $f_n(x)\to f(x)$ לכל
נקודה בקטע אזי $f(x)$ אינטגרבילית רימן.

2 נסח והוכח את משפט Egorov

3 הגדר אינטגרביליות במידה שוה של סדרת פונקציות $\{f_n\}$ והוכח כי אם $\{g_n\}$ אינטגרבילית במידה שוה. $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות ! $|f_n| \le |g_n|$ אז גם $\{f_n\}$ אינטגרבילית במידה שוה.

4 נסח והוכח את למת פאטו של [illegible].

6.9.89 (116)

מבחן בפונקציות ממשיות (מועד ב')

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות.
משך הבחינה 4 שעות, ללא שימוש בחומר עזר.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) $E \subset [0,1]$ היא מדידה אם"ם

$$|A|_e = |A\cap E|_e + |A\setminus E|_e$$

לכל קבוצה $A \subset [0,1]$ (מותר להסתמך על כך שלכל קבוצה $A\subset[0,1]$ קיימת קבוצה G_δ H כך ש- $A\subset H$ ו- $|A|_e=|H|_e$.)

(ב) אם $A\subset[0,1]$ בעלת מדה אפס אז גם $\{x^2 : x\in A\}$ בעלת מדה אפס.

(ג) אם בונים קבוצת קנטור מוכללת בכל שלב זורקים את השליש האמצעי של כל קטע את ה- $\frac{1}{5}$ האמצעי, מקבלים קבוצה בעלת מדה לבג חיובית.

(ד) אם $A\subset[0,1]$ מדידה ובעלת מדה חיובית אז הקבוצה

$$D=\{z : z=x-y,\ x,y\in A\}$$

(2) הוכח שקיימת קבוצה לא מדידה חלקית ל-[0,1]

(3) הוכח את הטענות הבאות

א. פונקציה חסומה על [0,1] הינה אינטגרבילית רימן אם"ם הינה רציפה כמעט תמיד על [0,1]

ב. אם f חסומה ואינטגרבילית רימן על [0,1] אזי f אינטגרבילית לבג והאינטגרלים שווים.

(4) (i) הגדרה כיסוי ויטלי של קבוצה $A \subset \mathbb{R}$

(ii) הוכח את למת הכיסוי של ויטלי

(iii) הוכח כי אם f חסומה ומדידה על $\mathbb{R}$ אזי הפונקציה

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

גזירה כמעט תמיד וקיים $\varphi'(x) = f(x)$ כ.ת.

מבחן בפונקציות ממשיות (יואל גלצנט)

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות.
משך הבחינה 4 שעות, ללא שימוש בחומר עזר.

(1) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(i) אם $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות מדידות וחסומות המקיימות

$$\forall\varepsilon \qquad m\{x\in[0,1] : |f_n(x)|\geq\varepsilon\}\to 0$$

אז $m\{x\in[0,1] : f_n(x)\to 1\}=0$.

(ii) קיימת קבוצה דלילה $A\subset[0,1]$ (כלומר הפנים של $\bar{A}$ הוא ריק) כך ש $m_e(A)=1$.

(iii) אם $\mathbb{R}\supset E_n$! $E_n\nearrow E$ אז

$\lim m_e(E_n)=m_e(E)$.

(iv) אם $E\subset\mathbb{R}$ מדידה ומקיימת

$$x,y\in E \Rightarrow x+y\,,\, x-y\in E$$

אז $E=\mathbb{R}$ או $m(E)=0$.

2) (i) נסח והוכח את משפט איגורוב.

(ii) הראה כי אם E מדידה $m(E) < \infty$ ו- $f_k \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ על E סדרת פונקציות מדידות אזי $f_k \xrightarrow{\text{במידה}} f$.

(iii) אם E מדידה ו- $f_k \xrightarrow{\text{במידה}} f$ סדרת פונקציות מדידות אזי קיימת תת-סדרה המתכנסת כ.ת. על E.

3) (i) הגדר כיסוי ויטלי של קב' $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) הוכח את למת הכיסוי של ויטלי.

(iii) הוכח כי אם f חסומה ומדידה על $\mathbb{R}$ אזי הפונקציה

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

גזירה כ.ת. וקיים $\varphi'(x) = f(x)$ כ.ת.

4) תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה צורה

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |f|^n \, dm \right)^{\frac{1}{n}} = M < \infty$$

(i) הוכח כי $|f(x)| \le M$ כ.ת. על $[0,1]$

(ii) אילו התנאים על f כנ"ל כך שהמשפחה $\{f^n : n=1,2,\dots\}$ תהיה אינטגרבילית במידה שווה?