מועד ב', סמסטר א', תשנ"ג
7.9.93

מס. תלמיד

| |
|---|
| |

בחינת מעבר
אלגברה ב' 1
פרופ' מ. הרצוג

## חלק א'

משך הבחינה: 60 דקות (לעולים חדשים 75 דקות)
אין להשתמש בחומר עזר וגם לא במחשבונים.
מספר השאלות: 15.

לכל שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.
סמן ☑ ליד התשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה : $6\frac{2}{3}$ נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת : 0 נק'
תשובה לא נכונה : $-1\frac{1}{3}$ נק'

בהצלחה!

**שאלה 1:** מספר האינבולוציות ב-$A_4$ הוא:

☐ 2    ☐ 3    ☐ 4    ☐ 5

**שאלה 2:** תהי $G$ חבורה מסדר 120 ונניח כי חבורות סילו-5 של $G$ אינן נורמליות ב-$G$. אזי $n_5$, מספר חבורות 5-סילו ב-$G$, שווה ל:

☐ 6    ☐ 12    ☐ 21    ☐ 24

**שאלה 3:** יהי $Z(G)$ המרכז של החבורה $G$ ותהי $G'$ חבורת הקומוטטור של $G$. אזי הטענה: $G/Z(G)$ אבלית

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $Z(G)\trianglelefteq G$.

☐ לא נכונה כאשר $Z(G)\trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר $G'\leq Z(G)$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 4:** יהיו $\alpha=(123)(45)$ ו- $\beta=(143)(25)$ איברי $S_5$. אזי הסדר של מכפלתם $\alpha\beta$ הוא:

☐ 2    ☐ 3    ☐ 5    ☐ 6

**שאלה 5**: תהי T חבורה ציקלית מסדר $2^4\cdot 7^4$.
אזי מספר החבורות החלקיות של T הוא:

☐ 25 ☐ 20 ☐ 16 ☐ 8

**שאלה 6**: תהי $G^2=\langle g^2 \mid g\in G\rangle$ תת החבורה של G הנוצרת ע"י ריבועי איברי G ותהי $G^2 \le H \le G$.
אזי הטענה: $H \trianglelefteq G$

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $G' \le H$ ($G'$ - חבורת קומוטטורים).
☐ לא נכונה כאשר $G' \le H$, אבל נכונה כאשר $G' \le G^2$.
☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 7**: מספר האיברים מסדר 5 ב- $S_5$ הוא:

☐ 4 ☐ 20 ☐ 24 ☐ 30

**שאלה 8**. תהי G חבורה, $Z(G)$ מרכזה. אזי הטענה: $Z(G) \neq 1$

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר G חבורה סופית.
☐ לא נכונה כאשר G חבורה סופית, אבל נכונה אם $|G|=p^n>1$, p ראשוני.
☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 9**: מספר מחלקות הצמידות של איברים מסדר ראשוני ב-$S_5$ הוא:

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

**שאלה 10**: תהיינה H ו-K תת חבורות של החבורה הסופית G.
אזי הטענה: HK הינו ת"ח של G

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $H \trianglelefteq G$.
☐ לא נכונה כאשר $H \trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר גם H וגם K נורמליות ב-G.
☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 11**: מספר האיברים מסדר 4 בחבורה הדיהדרלית $D_8$ מסדר 16 הינו:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 5 ☐ 6

**שאלה 12**: תהי S קבוצה חלקית של החבורה G.
אזי הטענה: $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$

☐ נכונה תמיד.
☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם S ת"ח של G.
☐ לא נכונה כאשר $S \leq G$, אבל נכונה אם S ת"ח אבלית של G.
☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 13**: תהי $G$ חבורה מסדר $15m$, כאשר $m$ הוא מספר טבעי זר ל-15, כלומר $(15,m)=1$. אזי הטענה: קיימת ב-$G$ ת"ח מסדר 15 וכל שתי ת"ח מסדר 15 צמודות זו לזו

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם ת"ח 5-סילו של $G$ נורמלית ב-$G$.

☐ לא נכונה כאשר ת"ח 5-סילו נורמלית ב-$G$, אבל נכונה אם גם ת"ח 5-סילו וגם ת"ח 3-סילו הן נורמליות ב-$G$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 14**: תהי $G$ חבורה סופית, $N,H \trianglelefteq G$ ונניח כי $G/N$, $G/H$ הן חבורות ציקליות. אזי הטענה: $G$ היא חבורה ציקלית

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $N\cap H=1$.

☐ לא נכונה כאשר $N\cap H=1$, אבל נכונה אם $N\cap H=1$ וגם $(|G/N|,|G/H|)=1$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

**שאלה 15**: תהי $H\leq G$. אזי הטענה: $C_G(H)\trianglelefteq G$

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $H\trianglelefteq G$.

☐ לא נכונה כאשר $H\trianglelefteq G$, אבל נכונה אם $H\trianglelefteq G$ ו-$H$ מסדר ראשוני!

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

1. תהי $G$ חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G$, $T\neq 1$ ציקלית.
אזי $Z(G)\neq 1$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי.
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה $G_1, G_2$ חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח
כי $N_1 \cong N_2$ וגם $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. אזי $G_1 \cong G_2$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $G_1, G_2$ הן חבורות אבליות
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G$ חבורה סופית, $N,H \trianglelefteq G$ : $G/N$, $G/H$
הן חבורות אבליות: אזי $G$ הוא חבורה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|N|)=1$
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G|=p^n$, כאשר $p$ ראשוני : $2\le n$, אזי:
א) יתכן כי $|G'|=p^{n-1}$ ($G'$ - חבורת הקומוטטורים של $G$).
ב) לא יתכן $|G'|=p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'|=p^{n-2}$.
ג) הטענות א' ; ב' אינן נכונות

1. תהי $G$ חבורה סופית ונניח כי $G/Z(G)$ הינה חבורה אבלית. אזי $G$ היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית
ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. תהי $S_n$ החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$ ונניח כי $H$ מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \geq 5$
ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G=AB$, כאשר $A$ ו-$B$ הן ת"ח אבליות של $G$. אזי $G$ היא אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$
ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

4. תהי $G$ חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ותהי $P$ ת"ח $p$-סילו של $G$. אזי $P/N$ היא ת"ח $p$-סילו של $G/N$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N \leq P$
ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

1. תהי $G$ חבורה סופית, $H \le G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$ ואשר $G'$ היא חבורת הקומוטטור של $G$. אזי $H$ אבלית.

א) נכון תמיד    ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית $A_n$ ויש תמיד ת"ח מאינדקס $n$

$\boxed{\text{שים לב: } A_1 = 1}$

א) נכון תמיד    ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \ge 3$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של $S_4$ הוא:

א) 4    ב) 5    ג) 6

---

4. תהי $G$ חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$ ונניח כי $C_G(a) \cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$    ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב',
15.7.90

# אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

**שאלה 1.**

א) הגדר את המושג: חבורת $p$-סילו של חבורה סופית. (3 נ'

ב) הגדר: ת"ח $K$ ו-$H$ של חבורה $G$ צמודות זו לזו. (2 נ'

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ת"ח $p$-סילו צמודות זו לזו - (20 נ'

**שאלה 2.**

א) הוכח: עבור $n\geq 3$, $A_n = \langle (1 2 k) \mid k=3,4,\dots,n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n\geq 3$, ו-$H$ מכילה מחזור מאורך 3 אזי $H = A_n$.

**שאלה 3.**

הוכח כי חבורה מסדר $pq$, $p$ ראשוני, אינה חבורה פשוטה

**שאלה 4.**

הוכח כי למשוואה $x^2ax=a^{-1}$ יש פתרון $x$ בחבורה $G$ אם ורק אם $a$ הוא חזקה שלישית של איבר ב-$G$.

בהצלחה!

מועד ב', סמסטר ב', תש"ן

17.9.90

מס. תלמיד

# אלגברה ג' 1

פרופ' מ. הרצוג

## חלק ב'

משך חלק ב': 2 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר.

שים לב: ענו על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

### שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית (3 נק').

ב) נסח את משפט קושי לחבורות אבליות (2 נק').

ג) הוכח: אם p ראשוני ואם G חבורה סופית, אזי G מכילה לפחות חבורת p-סילו אחת. (20 נק')

### שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n\geq 3$, $A_n=\langle (12k) \mid k=3,4,\dots,n\rangle$. (10 נק')

ב) הוכח: אם $H\trianglelefteq A_n$, $n\geq 3$ ו-$H$ מכילה מעגל מאורך 3, אזי $H=A_n$. (15 נק')

### שאלה 3.

הוכח שכל חבורה מסדר 255 הוא אבלית.

[רמז: $|G|=255=17\cdot 5\cdot 3$. תהיינה $H,K,L\leq G$ מסדרים 17,5,3 בהתאמה. הוכח: $H\triangleleft G$ והסק $G'<H$. הוכח גם ש-$K\triangleleft G$ או $L\triangleleft G$ והסק: $G'=1$]

### שאלה 4.

הוכח שלמשוואה $xax=b$ יש פתרון $x$ בחבורה $G$ אם ורק אם $ab$ הוא ריבוע של איבר של $G$.

1. תהי $G$ חבורה ותהיינה $K, H \le G$ המקיימות:
$K \le H$. אזי:

א) $N_G(K) \le N_G(H)$ ; ב) $N_G(H) \le N_G(K)$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

2. תהי $S$ קבוצה חלקית של החבורה $G$. אזי:

$$C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$$

א) נכון תמיד; ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $S$ חבורה חלקית.

ג) טענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G$ חבורה סופית ותהי $1 \lneq N \trianglelefteq G$.

אזי: $N \cap Z(G) \gneq 1$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, $p$ ראשוני

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

4. יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם על).

אזי:

א) ל-$G$ ישנה חבורת מנה איזומורפית ל-$H$;

ב) ל-$G$ ישנה ת"ח איזומורפית ל-$H$;

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

1. תהי $G$ חבורה סופית, $H \leq G$ ותהי $P$ ת"ח $p$-סילו של $G$. אזי $P \cap H$ היא ת"ח $p$-סילו של $H$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אלא נכון רק אם $H \trianglelefteq G$

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

2. יהיו נתונים התמורות: $\alpha=(15)(473)(26)$, $\beta=(16)(267)(34)$ ו-$\gamma=(17)(5362)$ ב-$S_7$. אזי:

א) $\alpha$ צמודה ל-$\beta$ ב-$S_7$; ב) $\beta$ צמודה ל-$\gamma$ ב-$S_7$.

ג) $\alpha$ צמודה ל-$\gamma$ ב-$S_7$.

---

3. תהי $G$ חבורה סופית פשוטה ותהי $H \leq G$ בעלת האינדקס: $|G:H|=5$. אזי: $G \cong A_5$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד; נכון רק אם $|H|=12$

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

4. תהי $H \leq G$ ונניח כי $g^2 \in H$ לכל $g \in G$.

אזי:

א) $G/H$ היא אבלית ב) $G/H$ איננה תמיד אבלית, אלא $G/H$ אבל

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

1. תהי $G$ חבורה סופית, $H \le G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$,
כאשר $G'$ היא חבורת הקומוטטור של $G$. אזי $H$ אבלית
א) נכון תמיד    ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$
ג) התשובות א' ו ב' אינן נכונות.

---

2. תהי $G$ חבורה סופית ונניח כי $G \simeq \mathrm{Inn}\,G$. אזי $G$ אבלית.
א) נכון תמיד    ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $G$ מסדר $p^m$, $p$ ראשוני.
ג) התשובות א' ו ב' אינן נכונות...

---

3. תהי $G$ חבורה סופית ותהי $G = FK$ כאשר $K \le G$
ו $F \trianglelefteq G$. אזי: $F \cap K \trianglelefteq G$.
א) נכון תמיד    ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $F$ אבלית.
ג) התשובות א' ו ב' אינן נכונות.

---

4. מספר האיברים הצמודים של $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$, מחזור
מאורך $n$ ב-$S_n$, הוא:

א) $3^n$    ב) $n!$    ג) $(n-1)!$

1. תהי $T$ חבורה ציקלית מסדר $2^n 3^m$

אזי מספר החבורות החלקיות של $T$ הוא:

א) $6nm$ ב) $nm$ ג) $(n+1)(m+1)$

---

2. תהי $G$ חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$, ו- $G/N$, $G/H$ חבורות ציקליות. אזי $G$ היא חבורה ציקלית

א) נכון תמיד;

ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|G/N|, |G/H|)=1$

ג) א' וב' אינם נכונים.

---

3. תהי $G$ חבורה מסדר $p^n$, $p$ ראשוני ונניח כי $|G/Z(G)|=p^2$. אזי $G/G'$ אינה ציקלי

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \le 4$;

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. תהי $S$ קבוצה חלקית של החבורה $G$. אזי:

א) $C_G(C_G(S)) \le S$ ב) $C_G(C_G(S)) \ge S$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', תש"ן
15.7.90

# אלגברה ב' 1
המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק א'.

משך חלק א': 60 דקות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
מספר השאלות: 16.

לכל שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.
סמן עיגול סביב האות א', ב' או ג' המתאימה לתשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה: 3.25 נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'
תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$ ובעלות ח״א. פולו מאת לפחות 3 ציקליות הוא:

א) 5 ב) 6 ג) 7

---

2. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^n$, כאשר p ראשוני ו-$n\geq 1$. תהי C מחלקת צמידות (של איבר) של G. אזי $|C|<p^{n-1}$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n>1$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

3. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^r m$, כאשר p ראשוני ו-$(p,m)=1$. נניח כי $p \mid |Z(G)|$ ותהי C מחלקת צמידות (של איבר) ב-G. אזי $p^r \nmid |C|$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם ח״א p-סילו של G היא אבלית

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית ותהי $H\leq G$. אם $a\in G$ ואם $a^2\in H$, אזי G היא בעלת סדר זוגי

א) נכון תמיד. ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, p ראשוני

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

1. תהי $G$ חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G$, $T \neq 1$ ציקלית.
אזי $Z(G) \neq 1$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה $G_1, G_2$ חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח כי $N_1 \simeq N_2$ וגם $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$. אזי $G_1 \simeq G_2$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $G_1, G_2$ הן חבורות אבליות

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G$ חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$ ; $G/N$, $G/H$ הן חבורות אבליות. אזי $G$ הוא חבורה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|, |N|)=1$

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G|=p^n$, כאשר $p$ ראשוני ; $2 \leq n$, אזי:

א) יתכן כי $|G'|=p^{n-1}$ ($G'$ - תת חבורת הקומוטטורים של $G$).

ב) לא יתכן $|G'|=p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'|=p^{n-2}$.

ג) הטענות א' ; ב' אינן נכונות

1. תהי $G$ חבורה סופית. ידוע כי $G/Z(G)$ היא חבורה אבלית. אזי $G$ היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

2. תהי $S_n$ החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$. ידוע כי $H$ מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \geq 5$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

3. תהי $G=AB$, כאשר $A$ ו $B$ הן ת"ח אבליות של $G$. אזי $G$ הינה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

4. תהי $G$ חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ותהי $P$ ת"ח p-סילו של $G$. אזי $P/N$ הינה ת"ח p-סילו של $G/N$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N \leq P$
ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

1. תהי $G$ חבורה סופית, $H \leq G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$ כאשר $G'$ הוא חבורת הקומוטטור של $G$. אזי $H$ אבלית

א) נכון תמיד  ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית $A_n$ ישנה תמיד ת"ח מאינדקס $n$

א) נכון תמיד  ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \geq 3$

שים לב: $A_1 = 1$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של $S_4$ הוא:

א) 4  ב) 5  ג) 6

---

4. תהי $G$ חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$

ונניח כי $C_G(a) \cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$  ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', ת
15.7.90

# אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

### שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת $p$-סילו של חבורה סופית. (3 נ'

ב) הגדר: ת"ח $K$ ו $H$ של חבורה $G$ צמודות זו לזו. (2 נ'

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ת"ח $p$-סילו צמודות זו לזו - (20

### שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n\geq 3$, $A_n = \langle (12k) \mid k=3,4,\dots,n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n\geq 3$ ו-$H$ מכילה מחזור מאורך 3
) אזי $H = A_n$.

### שאלה 3.

הוכח כי חבורה מסדר $p^{15}$, $p$ ראשוני, אינה חבורה פשוטה

### שאלה 4.

הוכח כי למשוואה $x^2ax=a^{-1}$ יש פתרון $x$ בחבורה $G$ אם ורק אם $a$ הוא חזקה שלישית של איבר ב-$G$.

בהצלחה!

דט.ז.ד

# אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק א'

חלק א': 60 דקות.
להשתמש בכל חומר עזר.
השאלות: 16.
שלכל שאלה יש תשובה נכונה אחת ויחידה.
עגול סביב האות א', ב' או ג' המתאימה
ה הנכונה.

ניקוד:
תשובה נכונה: 3.25 נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'
תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. תהי $G$ חבורה בעלת המרכז $Z(G)$ ותהי $H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $Z(G/H) \leq Z(G)/H$ (המרכז של $G/H$)

ב) $Z(G/H) \leq Z(G)H/H$

ג) $Z(G/H) \geq Z(G)H/H$

---

2. יהיו נתונים האיברים: $\alpha=(15)(473)(26)$ , $\beta=(16)(267)(34)$

! $\gamma=(17)(5362)$ ב- $S_7$. אזי:

א) $\alpha$ צמוד ל- $\beta$ ב- $S_7$.

ב) $\beta$ צמוד ל- $\gamma$ ב $S_7$.

ג) $\alpha$ צמוד ל $\gamma$ ב $S_7$.

---

3. תהי $G'$ חבורת הקומוטטור של $G$. אזי:

א) $Z(G/G') \lneq G/G'$ (המרכז של $G/G'$)

ב) $Z(G/G') = G/G'$

ג) $Z(G/G') \gneq G/G'$

---

4. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$

ובעלות חבורת 2-סילו ציקלית הוא:

א) 18

ב) 6

ג) 9

**1.** יהיו נתונים האיברים $\alpha=(12)(437)(56)$ , $\beta=(74)(125)(36)$ ו- $\gamma=(13264)(57)$ ב- $S_7$ . אזי:

א) $\gamma$ מצמיד את $\alpha$ ל- $\beta$ : $\alpha^{\gamma}=\beta$ .

ב) $\gamma$ מצמיד את $\beta$ ל- $\alpha$ : $\beta^{\gamma}=\alpha$ .

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

**2.** תהי $G$ חבורה ותהיינה $K,H \leq G$ המקיימות: $K \leq H$

אזי:

א) $N_G(K) \leq N_G(H)$

ב) $N_G(H) \leq N_G(K)$

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

**3.** מספר האיברים הצמודים של $(1\,2\,3\ldots n)$ ב- $S_n$ הוא:

א) $(n-1)!$

ב) $(n-2)!$

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

**4.** תהי $G$ חבורה סופית ותהי $H \leq G$ בעלת האינדקס $|G:H|=n$ . אזי:

א) $|G|$ מחלק את $n!$ .

ב) $n!$ מחלק את $|G|$ .

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

**1.** תהי $G$ חבורה סופית ותהי $P \in Syl_p(G)$.
נניח כי $N_G(P) \trianglelefteq G$. אזי:

א) $N_G(P) = G$

ב) $|G : N_G(P)| = 1+p$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות

---

**2.** חהי $G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ מכפלה ישרה של $r$, חבורות ציקליות מסדר ראשוני $p$. תהי $H \le G$ בעלת הסדר $p$. אזי:

א) $H = A_i$ עבור $i$ מתאים.

ב) $H \le A_i \times A_j$ עבור $i,j$ שונים מתאימים.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

**3.** תהי $G$ חבורה סופית ויהי $T$ אוטומורפיזם של $G$ ללא נקודות שבת. נניח כי $o(T)=2$. אזי:

א) $T(x) = x^2$ לכל $x \in G$.

ב) $T(x) = x^{-1}$ לכל $x \in G$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

**4.** אים לחבורה הסימטרית $S_n$ יש מסדר 4 ת"ח נורמלית ואזי:

א) $n = 3$

ב) $n = 4$

ג) $n = 5$

**1.** יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות סופיות. אזי:

א) $G = (\mathrm{Im} f)(\ker f)$.

ב) $|G| = |\mathrm{Im} f|\,|\ker f|$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

**2.** תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי $G/(N\cap M)$ היא אבלית. אזי:

א) $G/N$, $G/M$ הן חבורות אבליות.

ב) $G/N$ ו $G/M$ הן חבורות אבליות רק אם $N \neq M$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

**3.** מספר האיברים מסדר 2 בחבורת הקווטרניונים $Q$ מסדר 8 הוא:

א) 3

ב) 5

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

**4.** תהי $G$ חבורה סופית ותהיינה $H \le G$ ו $P \in Syl_p(G)$. נניח כי $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $P \trianglelefteq G$.

ב) $P \trianglelefteq G$ רק אם $H \text{ char } G$.

ג) $P \trianglelefteq G$ רק אם $H$ אבלית.

מועד א', סמסטר ב', תשמ"ט
4.7.89

# אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק ב'

משך חלק ב': 2 שעות

אסור להשתמש בכל חומר עזר.

עליך לענות: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

**שאלה 1.**

הוכח את משפט קושי לחבורות אבליות: אם G חבורה אבלית ואם p ראשוני המחלק את $|G|$, אזי קיים לפחות איבר אחד a ב-G בעל הסדר p: $o(a)=p$.

הערה: אין להשתמש במשפט המבנה של חבורות אבליות סופיות)

**שאלה 2.**

יהי G חבורה ותהי H ת"ח של G בעלת האינדקס הסופי: $|G:H|=n$. הוכח שקיימת $K \trianglelefteq G$ כך ש: $G/K$ איזומורפית לת"ח של $S_n$ (החבורה הסימטרית).

**שאלה 3.**

הוכח כי אין חבורה פשוטה בעלת הסדר $77p$, כאשר p מספר ראשוני.

**שאלה 4.**

(א) נסמן ע"י $G'$ את חבורת הקומוטטור של G. הוכח:

(1) לכל קוסט $G'x$, $x\in G$, הנו איחוד של מחלקות צמידות של איברי G.

(ב) אם G חבורה סופית לא אבלית, אזי $k(G)$ = מספר מחלקות הצמידות של איברי G, מקיים את האי-שוויון:

$$k(G) \ge |G:G'| + 1$$

בהצלחה!

מועד ב', סמסטר ג', תש"ן
24.9.89

# אלגברה ג' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

## חלק ג'

משך חלק ג': 2 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר.

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 4,3

### שאלה 1.

א) הגדר את המושג: תת-חבורת p-סילו של חבורה סופית.

ב) הוכח: כל חבורה סופית G מכילה, לפחות תת-חבורת p-סילו אחת לכל מספר ראשוני p.

(הערה: עליך לנסח את משפטי העזר בהם הנך משתמש ולא רק לקרוא להם בשם המתאים)

### שאלה 2.

תהי G חבורה ותהי $N \trianglelefteq G$. הוכח:

$$\{\text{כל הח"ח של } G/N\} = \{H/N \mid N \le H \le G\}.$$

### שאלה 3.

תהי G חבורה סופית מסדר $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, $p_i$ ראשוניים שונים ותהיינה $K$, $H$ ת"ח של G. הוכח:

א) (10 נק') אם לכל $i=1,\ldots,k$ מתקיים: או $p_i^{r_i} \mid |H|$ או $p_i^{r_i} \mid |K|$, אזי, $=HK$

ב) (15 נק') אם $(|G:H|, |G:K|)=1$ (כלומר האינדקסים זרים זה לזה) אזי $=HK$

### שאלה 4.

תהי G חבורה מסדר $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ ותהיינה $A \in Syl_{11}(G)$, $\in Syl_7(G)$ ו- $C \in Syl_3(G)$. הוכח:

א) (5 נק') $A \lhd G$.

ב) (10 נק') $AB, AC$ הן ת"ח אבליות של G.

ג) (10 נק') A מוכלת במרכז $Z(G)$ של G.

בהצלחה

**1.** תהי $G$ חבורה סופית מסדר $n$ ותהי $\trianglelefteq G$ ציקלית מסדר $m$. אזי:

א) ל-$G$ יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את $m$

ב) ל-$G$ יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את $n/m$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

**2.** מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$ ובעלות ת"ח ציקלית מאינדקס ראשוני הוא:

א) $3$.

ב) $4$.

ג) $6$.

---

**3.** מספר האיברים הצמודים של $(12)$ ב-$S_n$ הוא:

א) $2^n$.

ב) $n(n-1)$.

ג) $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

**4.** תהי $G$ חבורה מסדר $|G|=pm$ , $(p,m)=1$

ותהי $P\in Syl_p(G)$. נניח כי $P \ntrianglelefteq G$ ! $m\equiv 1 \pmod{p}$.

אזי:

א) $N_G(P)=P$.

ב) $N_G(P)\supsetneqq P$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

**1.** תהי T ת"ח ציקלית נורמלית של הח' הסופית הלא-אבלית G. אזי:

א) $C_G(T) = T$.

ב) $C_G(T) \supsetneq T$.

ג) $C_G(T) \subseteq T$ ולכן תמיד $C_G(T) = T$:

---

**2.** מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורת הקווטרניונים Q מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

**3.** יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם על). אזי:

א) ל-G ישנה חבורת מנה האיזומורפית ל H

ב) ל-G ישנה ת"ח האיזומורפית ל H;

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

**4.** תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי $G/N$ ו-$G/M$ הן חבורות סופיות. אזי:

א) G הוא סופית.

ב) אם $M \cap N$ הוא סופית, אז G הוא סופית

**1.** תהי $G' \le A \le G$ ותהי $H \le G$. אזי:

א) $HA = G$.

ב) $HA \le G$ ויתכן $HA < G$. ($\le$ פירושו ת"ח)

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

**2.** תהי $G$ חבורה סופית ותהי $P \in Syl_p(G)$. אזי:

א) $N_G(N_G(P)) = G$.

ב) $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

**3.** תהיינה $H$ ! $K$ ת"ח של $G$ ונניח כי $K \le H$. אזי:

א) $Z(K) \le Z(H)$.

ב) $C_G(K) \le C_G(H)$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

**4.** לחבורה הסימטרית $S_n$:

א) יש ת"ח מכל אינדקס בצורה:

$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r)$ , $0 \le r \le n-1$

ב) יש ת"ח מכל אינדקס המחלק את $n!$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

**1.** תהי $N \trianglelefteq G$ ונניח כי $N$ הוא לא-אבלית. אזי:

א) קיימת $K$, $1<K<N$ המקיימת: $K \lhd G$.

ב) אם $N \neq N'$ אזי קיימת $K$, $1<K<N$ המקיימת: $K \lhd G$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

**2.** מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורה הדיהדרלית $D_8$ מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

**3.** תהיינה $A,B$ ת"ח אבליות של $G$ ונניח כי $G=AB$. אזי:

א) $G$ הינה אבלית.

ב) אם $A \cap B \neq 1$, אזי $G$ הינה אבלית.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

**4.** תהי $R \trianglelefteq G$ ותהי $R \le K \le G$. אזי:

א) $N_{G/R}(K/R) \le N_G(K)/R$

ב) $N_{G/R}(K/R) \le \frac{N_G(K)R}{R}$

ג) $N_{G/R}(K/R) \ge \frac{N_G(K)R}{R}$