בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד ב, 17.9.1990
תש"ן

# מבחן באלגברה ב' I

## דן הרן

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הזמן המוקצב: ארבע שעות.

ענה על ארבע שאלות (בלבד!) מתוך שש השאלות הבאות.

### שאלה 1

הוכח שכל חבורות סילו־$p$ של חבורה סופית צמודות זו לזו.

### שאלה 2

תהי $N$ חבורה חלקית נורמלית של חבורה $G$.

(א) הגדר פעולה על $G/N = \{gN: g \in G\}$ והוכח ש־$G/N$ חבורה תחת פעולה זו.

(ב) הוכח שכל חבורה חלקית נורמלית של $G/N$ היא מהצורה $\{hN: h \in H\}$ עבור איזה חבורה חלקית נורמלית $H$ של $G$.

### שאלה 3

תהי $G$ חבורת־$p$ ותהי $N \neq 1$ חבורה חלקית נורמלית של $G$. הראה כי

(א) $G$ פועלת על $N$ על ידי ההצמדה וכי תחת פעולה זו מתקיים לכל $n \in N$:
$\{n\}$ הוא מסלול־$G$ (בעל אורך 1) אם ורק אם $n \in Z(G)$.

(ב) כל מסלולי־$G$ הם בעלי אורך $p^i$, באשר $i \geq 0$.

(ג) $N \cap Z(G) \neq 1$.

(ד) תן דוגמה לחבורה סופית $G$ (לאו דווקא חבורת־$p$) ו־$N \triangleleft G$ כך ש־$Z(N) \not\subseteq Z(G)$.

### שאלה 4

תהי $G$ חבורה מסדר אי זוגי ותהי $H \leq G$ כך ש $(G:H) = 3$. הוכח שאם $g \in G$ מקיים $g^2 \in H$ אז $g \in H$.

### שאלה 5

(א) הוכח שכל חבורה מסדר 91 היא מעגלית.

(ב) תן דוגמה לחבורה לא חילופית מסדר 21.

### שאלה 6

הראה שאין חבורה פשוטה מסדר 700.

בהצלחה

IvriTEX

אוניברסיטת תל אביב

מועד ב׳ תשמ״ח
4 9 1988

אלגברה ב׳ 1
ד״ר דן הרן

אין להשתמש בחמר עזר כלשהו.
הזמן המוקצב: שלוש וחצי שעות.
ענה על 5 שאלות. (ערך כל תשובה נכונה הוא 20 נקודות.)

1. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי ותהי H חבורה חלקית שלה כך ש- $(G:H)=3$.
   (א) הוכח: אם $a\in G\setminus H$ אז G היא איחוד זר של $H, aH, a^2H$.
   (ב) יהי $g\in G\setminus H$, $h\in H$ ונסמן $g^{-1}hg=a$. הוכח:
   $g^{-1}\notin aH,\ g^{-1}\notin a^2H$.
   (ג) הסק כי $H\triangleleft G$.

2. הוכח את המשפט: אם r הוא המספר של חבורות סילו-p של חבורה סופית G אז $r-1$ מתחלק ב-p.

3. (א) כמה חבורות צמודות יש לחבורת סילו-2 של $A_5$ בתוך $A_5$?
   (ב) הוכח שכל חבורה חלקית מסדר 8 של $S_4$ מכילה חבורה חלקית איזומורפית לחבורת קליין.

4. תהי H חבורה חלקית ממש של חבורה סופית G ($H\neq G$). הוכח: $\bigcup_{g\in G}H^g\neq G$.

5. תאר את כל החבורות מסדר 121.

6. מהי חבורת האוטומורפיזמים $Aut(K)$ של חבורת קליין K ? מאיזה סדר היא ולאיזה חבורה מוכרת היא איזומורפית?

7. יהי F שדה סופי. הוכח ש-$F^{\times}$ חבורה מעגלית.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל אביב

מועד א' תשמ"ח
סמסטר ב' 10.7.88

אלגברה ב' 1
ד"ר דן הרן

אין להשתמש בחמר עזר כלשהו.
הזמן המוקצב: שלוש וחצי שעות.
ענה על 5 שאלות. (ערך כל תשובה נכונה הוא 20 נקודות.)

1. (א) בנה שדה $E$ בן 27 אברים, כלומר: הצג קבוצה $E$ בת 27 אברים והגדר פעולות עליה כך שהיא תהיה השדה המבוקש.
<u>רמז</u>: לפולינום $X(X-1)(X-2)-1$ אין שורש בשדה $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
(ב) הוכח שאם $\alpha\in E$ ו- $\alpha\neq 0,1,-1$, אז כל אבר של $E$ ניתן להיכתב בצורה $a+b\alpha+c\alpha^2$, באשר $a,b,c\in\{0,1,2\}$.

2. הוכח את המשפט: כל שתי חבורות סילו-$p$ של אותה חבורה סופית $G$ צמודות זו לזו ב-$G$.

3. תהי $G$ חבורה מסדר $pq$, באשר $p<q$ שני מספרים ראשוניים. הוכח:
(א) $G$ פתירה.
(ב) אם $p$ אינו מחלק את $q-1$ אז $G$ מעגלית.
(ג) אם $p$ מחלק את $q-1$ אז קיימת חבורה לא חילופית מסדר $pq$.

4. (א) יהי $p$ ראשוני ותהי $A=\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p^{n_k}\mathbb{Z}$, ותהי $B\leq A$ כך ש-$B$ איזומורפית ל-$\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p^{m_2}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$. נניח כי $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_k$ ו-$m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_k$. הוכח ש- $m_1\leq n_1$.
(ב) מצא את כל החבורות החילופיות מסדר 108, עד כדי איזומורפיזם.

5. (א) הוכח שכל חבורת-$p$ היא פתירה.
(ב) כמה חבורות סילו-$p$ יש לחבורה הסימטרית $S_p$, באשר $p$ ראשוני? נמק!

6. הוכח: אם $G$ חבורה סופית ו-$A,B\leq G$ כך ש-$A\cap B=\{1\}$ אז $|AB|=|A|\cdot|B|$.

.. יהי $F$ שדה סופי. הוכח ש-$F^\times$ חבורה מעגלית.

בהצלחה!

ניברסיטת תל אביב

מועד א' תשמ"ח
סמסטר א' 18.2.88

# אלגברה ב' 1

ד"ר דן הרן

:ה על 4 שאלות.
ןמ המוקצב: שלוש וחצי שעות.

(א) נסח והוכח את משפט Cayley.
(ב) תהי $G$ חבורה לא חלופית. הוכח כי $G/Z(G)$ אינה מעגלית.

(א) הוכח שהמרכז של חבורת-$p$ לא טריביאלית אינו טריביאלי.
(ב) הוכח שכל חבורה מסדר 15 היא מעגלית.

(א) הוכח: אם $G$ חבורת-$p$ סופית אז כל חבורה חלקית מרבית (=מקסימלית) שלה היא נורמלית ובעלת אינדקס $p$.
(ב) תהי $A$ חבורה סופית, שיש לה בדיוק 3 חבורות חלקיות לא טריביאליות, ושלשתן מסדר 2. הוכח ש- $A$ איזומורפית לחבורת קליין.

.א) יהי $p$ ראשוני ותהי $A = \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_k}\mathbb{Z}$, ותהי $B \le A$ כך ש- $B$

איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^{m_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{m_l}\mathbb{Z}$. הוכח ש- $l \le k$.

(ב) תהי $G$ חבורה חלופית סופית ויהי $m$ המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש- $g^m=1$ לכל $g$ ב- $G$. הוכח שיש אבר מסדר $m$ ב- $G$.

(א) הוכח ש- $A_n$ נוצרת על ידי חישוקים מאורך 3.
(ב) הוכח כי $A_n$ היא חבורת הקומוטטור של $S_n$.

(א) יהי $p$ ראשוני ותהי $G$ חבורה סופית. הגדר: חבורת סילו-$p$ של $G$. הוכח את קיומה.
(מותר לך להניח את קיומה אם $G$ חלופית.)
(ב) הוכח שכל חבורה מסדר 1001 היא מעגלית. ($1001=7\times11\times13$.)

צלחה!