

בחניה באלגברה ב'  
מכאל ברוזני

אין להשתמש בתומר עזר כלשהו.  
משך הבחנה: שלוש שעות.  
ענה על 4 שאלות.

1. נסח והוכח את משפט האיזומורפיזם הראשון.
2. הוכח את המשפט: תהי  $G$  חבורה ציקלית סופית מסדר  $n$ ,  $G = \langle a \rangle$ . תהי  $H < G$  או  $H$  היא ציקלית,  $H = \langle a^r \rangle$ , כאשר  $r$  הוא המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש-  $a^r \in H$ .
3. הוכח כי חבורה מסדר 675 אינה פשוטה.
4. הראה כי חבורה מסדר 99 היא אבלית.
5. הוכח כי לכל תת-חבורת 2-סילו של  $S_4$  יש תת-חבורה לא ציקלית מסדר 4.

בהצלחה!

## בחנה באלגברה ב' 1

## פרופ' מיכאל בורובי

אין להשתמש בתומר עזר כלשהו.

משך הבחינה: שלוש שעות.

ענה על 4 שאלות.

1. נסח וחוכח את משפט האיזומורפיזם השלישי.

2. (א) הוכח כי אם  $G$  תבורה סופית ו- $a_1, \dots, a_n$  הם נציגים של כל מחלקות הצמידות שאינן

שייכות למרכז, אז

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|C_G(a_i)|}$$

(ב) הוכח כי המרכז של תבורת- $p$  לא טריביאלית אע"פ טריביאלית.

3. הוכח כי כל תבורה מסדר 35 היא ציקלית.

4. הוכח כי כל תבורה מסדר  $3^3 \cdot 7^2$  היא פתירה.

5. הוכח כי  $A_n$  עבור  $n \geq 5$  היא נוצרת על-ידי התמורות מהצורה  $(ab)(cd)$ , כאשר  $a, b, c, d$  הם

מספרים שונים.

6. (א) הוכח כי אם  $H$  היא תת-תבורה של  $G$  בעלת אינדקס  $n$  ב- $G$  ואין ב- $H$  תת-תבורה פרט

ל- $\{1\}$  אשר נורמלית ב- $G$ , אז  $G$  היא איזומורפית לתת-תבורה של  $S_n$ .

(ב) הוכח כי ל- $A_6$  אין תת-תבורות בעלות אינדקס 2, 3, 5 ב- $A_6$ .

בהצלחה!

בחינה באלגברה ב' 1  
פרופ' מיכאל בורובי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו  
משך הבחינה: שלוש שעות  
ענה על 4 שאלות

1. נסח והוכח את משפט האיזומורפיזם הראשון.
2. הוכח את המשפט: תת-חבורה של חבורה נילפוטנטית היא נילפוטנטית.
3. הראה, שתבורה מסדר 1700 אינה פשוטה.
4. תהי  $G$  חבורה מסדר 105. הוכח, ש-  $G$  פתירה.
5. (א) הוכח, שאם  $n \geq 5$ , אז החבורה  $A_n$  נוצרת ע"י מתזורים באורך 3.  
(ב) הוכח, ש-  $A_n = [S_n, S_n]$ .
6. הוכח, שכל חבורה מסדר 15 היא ציקלית.

בהצלחה!

בחנה באלגברה ב' 1  
פרופ' מיכאל בורבוי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.  
משך הבחינה: שלוש שעות.  
ענה על 4 שאלות.

1. נסח והוכח את משפט האיזומורפיזם השני.
2. הוכח את המשפט: כל תבורת- $p$  היא פתירה.
3. הראה, שכל תבורה מסדר 1001 היא ציקלית.
4. הראה, שלכל תת-תבורה מסדר 8 ב- $S_4$  יש תת-תבורה איזומורפית ל- $Z_2 \oplus Z_2$ .
5. תהי  $N$  תת-תבורה נורמלית ב- $A_n$  ( $n \geq 5$ ), המכילה מכפלה של שני חילופים זרים. הראה, ש- $N = A_n$ .
6. הוכח, שכל תבורה מסדר 169 היא אבלית.

בהצלחה!

בחינה באלגברה ב' 1  
פרופ' מיכאל ברובוי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.  
משך הבחינה: שלוש שעות.  
ענה על 4 שאלות.

1. נסח והוכח את משפט ההתאמה.

2. הוכח את המשפט: כל תת-חבורה של חבורה פתירה היא פתירה.

3. הוכח כי כל חבורה מסדר 1225 היא (א) מכפלה ישרה של שתי תת-חבורות סילו, (ב) אבלית

4. (א) תהי  $H < S_n$ ,  $n \geq 5$ ,  $H \neq S_n$ ,  $\{1\} \neq H$ . הוכח כי  $H = A_n$ .  
(ב) מה ניתן לומר על הטענה הקודמת כאשר  $n = 3$  וכאשר  $n = 4$ ?

5. הוכח כי אם  $G$  חבורה סופית,  $A, B < G$ , כד ש-  $A \cap B = \{1\}$ , אזי  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .

6. תהי  $N$  תת-חבורה נורמלית של חבורה  $G = G_1 G_2 \cdots G_n$ . נניח כי  $G_i < G$  ו-  $N \cap G_i = \{1\}$ . עבור  $i = 1, \dots, n$ , הוכח כי  $N \subset Z(G)$ .

בהצלחה!

סמסטר א' - תשנ"ו

מ/אז"א  
5.02.1996

אלגוריתם ת"א

בחינה באגורה ב' 1  
כח"פ מ. ב/ח"ב"ו

אין להשתמש בכל חומר עזר  
משך הבחינה: 3 שעות  
ענה על 4 שאלות

1. נסח והוכח את משפט קיילי (Cayley).
  2. הוכח כי המרכז של תורת-ק לא טריבואלית אינו טריבואלי.
  3. הוכח כי תורת מסדר 700 אינה פשוטה.
  4. תהי  $G$  תורת מסדר  $q$ ,  $q \neq 2$ . הוכח ש- $G$  פתורה.
  5. א. הוכח שאם  $G/Z(G)$  ציקלית אז  $G$  אבלי.  
ב. נניח ש  $|G|=195$  ו-  $1 \neq Z(G) \neq G$ . הוכח ש  $Z(G) \cong \mathbb{Z}_5$ .
  6. תהי  $G$  תורת מסדר אי-זוגי,  $H < G$  כך ש-  $[G:H]=3$ .  
הוכח שאם  $g \in G$  כך ש-  $g^2 \in H$ , אז  $g \in H$ .
- בהצלחה!