שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

כמה שורשים יש למשוואה $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2=\frac{1}{8}$?
כמה מהם חיוביים? האם יש שורש x_0 ש- $|x_0|>1$?

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2-\frac{1}{8}$

למשוואה יש שורשים בדיוק בנקודות שבהן $g(x)$ מתאפסת. $g(x)$ רציפה וגזירה. מתקיים:

$$g'(x)=x^3-2x^2+2x=x(x^2-2x+2)=x((x-1)^2+1)$$

מכיוון ש $(x-1)^2+1$ תמיד חיובי, אז הפונקציה מונוטונית עולה עבור $x>0$ ומונוטונית יורדת עבור $x<0$. לכן הפונקציה מתאפסת לכל היותר נקודה חיובית אחת ולכל היותר נקודה שלילית אחת.

מתקיים $g(0)<0$, $g(1)>0$, $g(-1)>0$.

לכן לפונקציה יש ערכי ביניים $0<x_1<1$, $-1<x_2<0$ שעבורם $g(x_1)=0$, $g(x_2)=0$.

לכן אין שורשים ימינה ל 1 ושמאלה ל -1.

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) $(0<a<b)$ המקיימת $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{f(b)}{f(a)}$ הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=-\frac{c}{2}f'(c)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר בקטע $[a,b]$ פונקציה $g(x)=x^2\cdot f(x)$.

הפונקציה g היא רציפה וגזירה בקטע הפתוח (כמכפלה של פונקציות רציפות וגזירות).

על-פי הנתון מתקיים $g(a)=g(b)$.

על-פי משפט רול (או לגרנג') קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $g'(c)=0$. מתקיים $g'(x)=2\cdot x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$.

מכיוון ש $c>0$ אז לנקודה c מתקיים $2f(c)=-cf'(c)$ ומתקיימת הדרישה.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

חשבו את האינטגרל (אם קיים)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$$

<u>פתרון:</u>

נציב $t=\cos x$, $dt=-\sin x\cdot dx$

$x=0 \Longrightarrow t=1$, $x=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow t=0$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx=-\int_1^0\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}=\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt=3t^{\frac{1}{3}}\Big]_0^1=3$$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה גזירה שלילית לכל x.
הוכיחו: x_0 נקודת קיצון מקומי של $f(x)$ אם ורק אם x_0 נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)=\int_0^x f^2(t)dt$
האם ל- $g(x)$ נקודת קיצון מקומי או מוחלט?

פתרון:

מכיון ש $f(x)$ רציפה אז $g(x)$ רציפה וגזירה לכל x ומתקיים $g'(x)=f^2(x)$, מכיון ש $f(x)$ גזירה אז מתקיים $g''(x)=2f(x)\cdot f'(x)$. בנקודת פיתול של הפונקציה g, הסימן של g'' מתחלף ומכיון ש $f(x)<0$ לכל x אז גם הסימן של f' מתחלף. לכן זו נקודת קיצון מקומי.

בכיוון השני: f' מחליפה סימן בנקודה x_0 אז מכיון ש f תמיד שלילית אז גם g'' מחליפה סימן בנקודה x_0 לכן x_0 היא נקודת פיתול.

מכיון ש $g'(x)=f^2(x)>0$ לכל x אז $g(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה, מתקיים $g(0)=0$ ואין לה נקודות קיצון בתחום התחום.

שאלה: (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{5n-3}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\frac{3}{5}(5n-3)-\frac{2}{5}\cdot 3}{5n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3}{5}}\cdot e^{\frac{-\frac{6}{5}}{5n-3}}=e^{-\frac{3}{5}}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

עבור אילו ערכי a, b תהיה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x - x}{x^3} & x\neq 0 \\ b & x=0 \end{cases}$$

רציפה ב-0 ?

פתרון

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=b$.

בפונקציה $\dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x - x}{x^3}$, כאשר $x\to 0$ הגבול של המונה וגם של המכנה הוא 0. המונה וגם המכנה הם פונקציות גזירות מכל סדר. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\sin x+0.5b\cdot\sin 2x - x}{x^3}=$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1}{3x^2}$$

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to 0} a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1=0$ וזה קורה אם $a+b=1$. אם זה קורה אז נמשיך להשתמש בכלל של לופיטל עוד פעם: נקבל שהגבול של המנה הוא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\sin x-2b\cdot\sin 2x}{6x}$$

צריך להתקיים שהגבול של המונה כאשר $x\to 0$ הוא 0, זה קורה עבור כל a,b קבועים. נשתמש בכלל של לופיטל עוד פעם. הגבול של המנה שווה ל $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\cdot\cos x-4b\cdot\cos 2x}{6}$

צריך להתקיים $b=\dfrac{-(a+4b)}{6}$ וגם $a+b=1$ שראינו קודם.

שלומי

שאלה (מבחן של פרופ' סוכן)

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של a וגזירה בנקודה a.

כמו כן $f(a)>0$. חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

פתרון

מכיוון ש f גזירה בנקודה a אז מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=f'(a)$$

עבור כל $s>f'(a)$! $0<t<f'(a)$ קיים N טבעי כך שעבור כל $n>N$:

$$t<\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}<s$$

ועבור כל $n>N$ מתקיים

$$\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}t}{f(a)}\right)^n\leq\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n\leq$$

$$\leq\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}s}{f(a)}\right)^n=\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n$$

לגבי כל $t<f'(a)<s$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{t}{f(a)}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{s}{f(a)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

לכן קיים הגבול

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סובן)

תהי $f(x)$ רציפה ב $[0,1]$ כך ש $f(x)\in[0,1]$. הוכח/י שעבור כל n טבעי יש למשוואה $x^n=f(x)$ פתרון ב $[0,1]$.

פתרון

עבור n נתון נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-x^n$.
מתקיים $g(0)=f(0)-0^n\geq 1$, $g(1)=f(1)-1^n\leq 0$.
$g(x)$ רציפה בקטע כהפרש של שתי פונקציות רציפות. לכן עבור כל $g(1)\leq d\leq g(0)$ קיימת נקודה c כך ש $0\leq c\leq 1$, $g(c)=d$!
בפרט קיימת נקודה c_0 שבה $g(c_0)=0$.
בנקודה זו מתקיים $f(c_0)-c_0^n=0$.
כך ניתן למצוא פתרון כזה עבור כל n נתון.

שאלה (מבחינה של פרופ' סיבשינסקי)

חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}dt$

פתרון

ננסה את מזלנו ונבדוק אם קיים הגבול של $f(t)=(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}$ כאשר $t\to 0$. נחשב את הגבול של $\ln f(t)$.

$$\lim_{t\to 0}\ln\left((\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t}$$

המונה והמכנה שואפים ל 0 כאשר $t\to 0$. שניהם גזירים בסביבת $t=0$ לכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t)+\sin(t))}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin(t)+\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}}{1}=1$$

לכן $\lim_{t\to 0}f(t)=e$. עבור כל $a>e$, $e>b$ מתקיים

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x b\,dt\leq\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x a\,dt=a$$

לכן הגבול הוא e.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' אדמוביץ' ופרופ' סטשינסקי)

חשב

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$$

<u>פתרון</u>

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

הוא סכום של n מחוברים שכל אחד מהם

הכי קטן מ $\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}$ וגדול מ $\frac{1}{n+0.5}$

(הערה קריטית: $(n+0.5)^2=n^2+n+0.25>n^2+n$)

לכן $\frac{n}{n+0.5}<a_n<\frac{n}{n}$

מכיון שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+0.5}=1$

אז קיים $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' אברמוביץ ופרופ' סיקשינסקי)

חשב $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

<u>פתרון</u>

נחשב $\lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)$

אם קיים לגבולו זה גבול אז לפי אריתמטיקה של גבולות נוכל למצוא את הגבול המבוקש.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

מתקיים $\lim_{x\to 0}x^2=0$ וגם $\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$

שתי הפונקציות הן גזירות מכל סדר בסביבה של הנקודה $x=0$. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה יתאפס.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2}=-\frac{1}{2}$$

לכן מתקיים $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-0.5}$

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' גלוסקין ופרופ' סודשינסקי)

הוכח כי אם $a_0, a_1, \dots, a_p$ מקיימים $a_0+a_1+\dots+a_p=0$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

<u>פתרון</u>

נשים לב שעבור כל $k\geq 1$ מתקיים $\sqrt{n+k}<\sqrt{n}+\frac{k}{\sqrt{n}}$ (ההוכחה באמצעות העלאת שני האגפים בריבוע). לכן:

$$a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n+p}<$$

$$<a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\dots+a_p\cdot\left(\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left[a_0\sqrt{n}+a_1\cdot\sqrt{n}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n}\right]+$$

$$+a_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+a_2\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}+\dots+a_p\cdot\frac{p}{\sqrt{n}}$$

עפ"י הנתון הסוגריים המרובעים מתכנסים ל-0. סכום יתר האיברים הוא לא יותר מ: $\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i\cdot p}{\sqrt{n}}$.

מכיוון ש-a_i ו-p הם קבועים אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum a_i\cdot p}{n}=0$ ובגבול הכל 0 כנדרש.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אברמוביץ' ופרופ' סבשינסקי)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם עבור כל x ממשי מתקיים האי שוויון $f(x) < g(x)$ והפונקציות f, g גזירות אזי מתקיים אי השוויון $f'(x) < g'(x)$

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

נגדיר

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad \text{עבור} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$g(x) = 1 \quad \text{עבור} \quad -\infty < x < +\infty$$

עבור כל $-\infty < x < +\infty$ מתקיים $f(x) < 1$. שתי הפונקציות הן גזירות בכל נקודה על הישר.

מתקיים $g'(x) = 0$ עבור כל $-\infty < x < +\infty$

אך $f(x)$ היא פונקציה גזירה עולה עבור $0 < x$

ולכן עבור כל $0 < x$ מתקיים $0 < f'(x)$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}}$

פתרון

עבור כל k קבוע

$$\frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}} = \frac{2^k\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)}{2^k\left(2+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3\right)}$$

עבור כל k טבעי קבוע ביטוי זה גדול מ

$$\frac{\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\frac{2}{3}\cdot 3+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

וקטן מ

$$\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}$$

לביטוי זה יש גבול $\frac{1}{3}$ כאשר $k\to\infty$. לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

שאלה (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2^k+3^k}$

פתרון

עבור כל k קבוע

$$3=\sqrt[k]{3^k}<\sqrt[k]{2^k+3^k}<\sqrt[k]{2\cdot 3^k}=\sqrt[k]{2}\cdot 3$$

כאשר k שואף לאינסוף שני האגפים שואפים ל 3.
לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא 3.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' פיבשינסקי)

מצא $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3}+x$

פתרון

עבור כל $x<0$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} > -x$

ולכן עבור כל $x<0$ $\sqrt[3]{1-x^3}+x>0$

עבור למשל כל $x<-8$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} < -x-\frac{1}{x}$

(הערה: אם מעלים את שני האגפים שהם חיוביים בשלישית אז רואים זאת)

לכן מתקיים עבור כל $x<-8$

$$-\frac{1}{x} > \sqrt[3]{1-x^3}+x > 0$$

מכיוון שכאשר $x\to-\infty$ שני האגפים שואפים ל-0, אז לפי משפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול הוא 0.

שאלה (מבחינה של פרופ' מיבשינסקי)

הוכח כי למשוואה $y=x^5+ax^3+b$ $(a,b>0)$ שורש ממשי יחיד.

פתרון

מתקיים $\lim_{x\to-\infty} x^5+ax^3+b=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^5+ax^3+b=\infty$

והפונקציה היא רציפה. לכן קיימת נקודת ביניים בה היא אפס.

מתקיים $y'=5x^4+3ax^2 > 0$ לכל x. לכן הפונקציה לא יכולה להתאפס ביותר מנקודה אחת.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' לויתן ופרופ' סודין באינפי' לפיזיקאים)

מצא את סימן האינטגרל $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

פתרון

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx-\int_{2\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin(2\pi-x)}{2\pi-x}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\pi-x}\right)dx$$

בכל נקודה $0\le x\le\pi$ מתקיים $\sin x\ge 0$ ובכל נקודה $0\le x<\pi$ מתקיים $\frac{1}{x}-\frac{1}{2\pi-x}>0$ כאשר $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi-\pi}=0$. לכן זהו אינטגרל של פונקציה אי שלילית שהיא חיובית ממש בקטע שלם, לכן האינטגרל הוא חיובי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'רבק)

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{6}$ כאשר

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

(רמז: אינטגרל מסוים)

פתרון

מתק"ב

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

ביטוי זה הוא סכום חלוקה תחתון של האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ כאשר גודל קטעי החלוקה שואף לאפס,

לכן הגבול הוא האינטגרל: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$

נציב $t = \frac{x}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int_0^{0.5} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big]_0^{0.5} = \frac{\pi}{6}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סיבג'נסקי)

הוכח כי אם $a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$ אזי
למשוואה $a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}=0$
יש שורש בקטע $0\le x\le 1$.

פתרון

נסתכל על הפונקציה $f(x)=a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}$,
זו פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$, לכן היא מקבלת בקטע ערך מכסימלי בנקודה x_1 וערך מינימלי בנקודה x_2.

הפונקציה רציפה בקטע סגור, זו פונקציה אינטגרבילית.
אילו היה מתקיים $f(x_1)<0$ אזי היה מתקיים

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 f(x_1)\,dx = f(x_1)<0$$

אך נתון $\int_0^1 f(x)\,dx = a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$

לכן $f(x_1)\ge 0$. משיקולים דומים נקבל $f(x_2)\le 0$.

לכן מכיון שהפונקציה רציפה אזי קיימת בקטע הסגור שבין x_1 ל x_2 נקודה x_3 שבה $f(x_3)=0$.

שלומי

שאלה חשבוני (מבחינה של פרו' סלכן)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

פתרון

הפונקציות $e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x$ ו- $\sin^2 x$ שואפות ל- 0 כאשר $x\to 0$! וכן גזירות מכל סדר ולכן נוכל להפעיל את כלל לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה לא יתאפסו בנקודה 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-\sin x-x\cos x+\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-x\cdot\cos x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-\cos x+x\cdot\sin x}{2\cdot\cos 2x}=$$

$$=\frac{2\cdot e^0-\cos 0}{2\cdot\cos 0}=0.5$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח או הפרך.
יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון שעבור כל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי N כך שעבור כל מספר טבעי $n>N$ מתקיים $|x_n-y_n|<\varepsilon$

אזי קיים מספר $a\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=a$.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.
נגדיר שתי סדרות: לכל n $x_n=y_n=n$
כך לכל n $|x_n-y_n|=0$ אך קיים $\lim x_n=\infty$.
אם נרצה שגם לא תהיה התכנסות ל ∞
אז נבחר סדרות אחרות: $x_n=y_n=(-1)^n\cdot n$.
במקרה זה גם $x_n-y_n=0$ אך לא קיים גבול לסדרות וגם אין גבול $+\infty$ או $-\infty$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח שלמשוואה $x^2 = x\sin x + \cos x$ יש בדיוק שני שורשים ב R.

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$

$g(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה ב R בהכלל של פונקציות רציפות וגזירות.

$$g'(x) = 2x - \sin x - x\cdot\cos x + \sin x = 2x - x\cdot\cos x = x(2-\cos x)$$

$2-\cos x$ תמיד גדול מ 0. לכן $g'(x)<0$ עבור $x<0$; $g'(x)>0$ עבור $x>0$

מתקיים: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g(0)<0$

מכיון שהפונקציה רציפה עבור $x<0$ ומכיון ש 0 הפעל ערך ביניים אז קיימת נקודה $c<0$ כך ש $\infty > g(c) = 0 > g(0)$. מכיון ש g בעל נגזרת שלילית עבור $x<0$ אז עבור $c_1<c_2<0$ מתקיים $g(c_1) > g(c_2)$ $g(c_2) = g(c_1) + (c_2-c_1)\cdot g'(c_3)$ כאשר c_3 איזשהי נקודה המקיימת $c_1 \le c_3 \le c_2$ לכן יש רק נקודה יחידה c : $c<0$ שבה $g(c)=0$, בנקודה שבה g מתאפסת ורק בנקודה כזאת יש פתרון למשוואה.

משיקולים דומים נקבל שקיים גם רק פתרון חיובי אחד.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח/י או הפרך/י:
פונקציה חסומה ב $[a,b]$ היא אינטגרבילית.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.
נגדיר

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \text{ רציונלי} \\ 0 & x \text{ אי רציונלי} \end{cases}$$

בכל קטע באורך חיובי קיימים גם רציונלים וגם אי רציונלים, לכן בכל חלוקה של הקטע יש בכל תת קטע גם נקודה שבה $f(x)=1$ וגם נקודה שבה $f(x)=0$. לכן הסכום העליון שווה בכל חלוקה ל $b-a$ והסכום התחתון שווה עבור כל חלוקה ל 0. לכן אין סדרת חלוקות שבהן ההפרש בין שני הסכומים שואף ל 0. לכן הפונקציה לא אינטגרבילית.

שלומי

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' מכן)

נתון $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ חשב $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot e^{-ax^2}dx$

__פתרון__

נשתמש באינטגרציה בחלקים

נגזור $v=x$ $\qquad$ $v'=1$

$u'=x\cdot e^{-ax^2}$

נחשב $\int x\cdot e^{-ax^2}dx$. נציב $x^2=t$, $2xdx=dt$

ונקבל
$$\int x\cdot e^{-ax^2}dx=\int\frac{1}{2}\cdot e^{-at}\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2a}\cdot e^{-at}=-\frac{1}{2a}\cdot e^{-ax^2}$$

לכן
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot x\cdot e^{-ax^2}dx=\left[x\cdot\frac{-1}{2a}\,e^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}dx\overset{*}{=}\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

* מתקיים
$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}=0$$

עבור כל a שעבורו האינטגרל הנתון הוא סופי.
אם $a\le 0$ אז $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ אינו סופי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוקן)

יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a \in [c,d]$

וכמו כן $x_n \neq y_n \quad \forall n \in N$

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב $[c,d]$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$$

פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.
הרעיון הוא שבנתונים אלה הנגזרת לא חייבת להיות רציפה.
נגדיר פונקציה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x^{1.5}\cdot \sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1.5}\cdot\sin\frac{1}{x^2}-0}{x}=0 \quad \text{מתקיים}$$

נגזור את הפונקציה בנקודה $x\neq 0$ ונקבל

$$f'(x)=1.5\cdot x^{0.5}\cdot\sin\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{1.5}$$

ולנגזרת כנ"ל אין גבול כאשר $x\to 0$
ניתן ממש דוגמא לשתי סדרות ששואפות ל 0 ושבהן הגבול המבוקש לא שואף ל 0.

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \quad , \quad y_n=\frac{1}{\sqrt{(2n+\frac{1}{2})\pi}}$$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}}\right)^{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}}\right)^{2}}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot 1-0}{\frac{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}\cdot\sqrt{2n\pi}}}\right| \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1.5}\cdot n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot n^{0.25}\cdot\frac{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{(2n+0.5)\pi}}{2n\pi-(2n+0.5)\pi}\right| = \infty$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סלון באינפי לפיסיקאים)

נניח כי $f(x)$ רציפה ב $[0,\infty)$ וכי קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$ סופי. הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה.

פתרון

מכיון שיש לפונקציה גבול a סופי כאשר $x\to\infty$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים N כך שעבור כל $x>N$ מתקיים $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן לפי אי שוויון המשולש קיים עבור כל $x_1,x_2>N$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$!!

מכיון שהפונקציה רציפה בקטע $[0,N+1]$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שעבור כל $0\le x_3,x_4\le N+1$ המקיימים $|x_3-x_4|<\delta_1$ קיים $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,1\}$ אז עבור כל $0\le x_5,x_6<\infty$ המקיימים $|x_5-x_6|<\delta$ קיים $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

הסבר: אם מתקיים $x_5>N$, $x_6>N$ אז כבר ראינו זאת. אם אחד מבין x_5 ו-x_6 קטן מ-N אז השני שביניהם לא גדול מ-$N+1$ (כי $\delta\le 1$) ולכן גם ראינו זאת כי $|x_5-x_6|<\delta_1$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' בן ארצי באוני' לפיסיקאים)

לקבוע האם הפונקציה $\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty,+\infty)$ ולהוכיח את התשובה.

פתרון

נגזור את הפונקציה ונקבל נגזרת

$$\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin\sqrt[3]{x}+\cos\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{x}$$

עבור $x>1$ (או עבור כל קבוע חיובי) הנגזרת חסומה.

לכן עבור כל $x_1,x_2\geq 1$ מתקיים $f(x_1)-f(x_2)=f'(x_3)(x_1-x_2)$ כאשר x_3 הוא נקודה בין x_1 ל- x_2.

עבור $\varepsilon>0$ נבחר $\delta_1=\frac{\varepsilon}{M}$ כאשר M הוא חסם עליון על הנגזרת בקטע $(1,\infty)$. כך עבור $|x_2-x_1|\leq\delta_1$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon$.

הפונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ ולכן היא רציפה בו במידה שווה, נוכל לבחור δ_2 כך שאם $0\leq x_3,x_4\leq 2$, $|x_3-x_4|<\delta_2$ אז $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$ ואז עבור x_5,x_6, $|x_5-x_6|<\delta$ אז מתקיים או ש- $x_5,x_6\geq 1$ ו- $|x_5-x_6|<\delta_1$ או ש- $x_5,x_6\leq 2$ ו- $|x_5-x_6|<\delta_2$ ובכל אחד מהמקרים הללו $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחנה של פרופ' אדרמודל ופרופ' סגשינסקי)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\cdot \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

כאשר $g(0)=g'(0)=0$.

<u>הוכח</u> <u>שהפונקציה</u> <u>גזירה</u> <u>באפס</u>.

<u>פתרון</u>

לפי הגדרת הנגזרת אם קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}$

אז הפונקציה גזירה ב 0.

כאן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\sin(\frac{1}{x})}{x-0}$$

מכיון שהפונקציה g גזירה ב 0 והנגזרת שווה ל 0 אזי עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור כל $|x|\leq\delta$ מתקיים $-|\varepsilon x|\leq g(x)\leq|\varepsilon x|$

מכיון שעבור כל $x\neq 0$ מתקיים $|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$ לכן מתקיים עבור כל x $|x|\leq\delta$:

$$\left|\frac{g(x)\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-0}\right|\leq\left|\frac{\varepsilon x}{x}\right|$$

ומתקיים $\left|\frac{f(x)-0}{x-0}\right|\leq\varepsilon$ $\lim_{x\to 0}$ עבור כל $\varepsilon>0$ לכן קיימת בנקודה 0 נגזרת והיא שווה ל 0.

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' אדרמוביץ' ופרופ' סדשנסקי')

הוכח שלא קיימות שתי פונקציות f, g גזירות בקטע $I=(-1,1)$ כך ש $f(0)=g(0)=0$ ו $x=f(x)\cdot g(x)$.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שקיימות פונקציות גזירות כאלה בקטע.
במקרה זה, לפי נוסחת חישוב הנגזרת של מכפלת פונקציות נקבל $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

אך $x=f(x)\cdot g(x)$, לכן מתקיים לכל x בקטע

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=1$$

בפרט עבור $x=0$: $f'(0)\cdot g(0)+f(0)\cdot g'(0)=1$

אך נתון $f(0)=g(0)=0$ ולכן לא יתכן שתתקיים הזהות הנ"ל עבור $f'(0)$ ו $g'(0)$ נתונים. סע"מ.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

חשבו: $\lim_{\beta\to\infty}\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx$

פתרון

נחשב עבור β קבוע את $\int_0^1 e^{\beta(x-1)}\,dx$

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$u=x$, $u'=1$

$v'=e^{\beta(x-1)}$, $v=\frac{1}{\beta}e^{\beta(x-1)}$

$$\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx=\frac{1}{\beta}\cdot e^0-0-\left[\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1=\frac{1}{\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}\cdot 1-\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}\right)$$

כאשר $\beta\to\infty$ אז $\frac{1}{\beta}$ שואף ל-0, $\frac{1}{\beta^2}$ שואף ל-0, $\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}$ שואף לאפס.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סובן)

חשבו $\lim_{B\to\infty}\int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$

פתרון (פתרון קדיק נוספת)

עבור כל $B>0$ מתקיים:

$$\int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} x\cdot e^{B(x-1)}dx+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$$

שני האינטגרלים הם אי שליליים.

עבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים $x\cdot e^{B(x-1)}\le e^{B(x-1)}$

לכן האינטגרל הראשון אינו גדול מ (למעשה קטן מ) $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B(x-1)}dx$. $e^{B(x-1)}$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע לכן האינטגרל קטן מ $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B(1-\frac{1}{\sqrt{B}}-1)}dx$ ששווה ל $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{-\sqrt{B}}dx$ שקטן מ $\int_0^1 e^{-\sqrt{B}}dx$ ששווה ל $e^{-\sqrt{B}}$.

אך מתקיים $\lim_{B\to\infty} e^{-\sqrt{B}}=0$.

לגבי האינטגרל השני: מתקיים עבור $x\le 1$: $e^{B-1}\le 1$ לכן האינטגרל קטן מ $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\,dx$ שקטן מ $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 1\,dx$ ששווה ל $\frac{1}{\sqrt{B}}$.

אך $\lim_{B\to\infty}\frac{1}{\sqrt{B}}=0$ לכן האינטגרל שואף ל 0.

לכן האינטגרל כולו שואף ל 0 כאשר $B\to\infty$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שציבק)

הראו כי הפונקציה $f(x)=x\cdot\ln x\cdot\sin x$ מקבלת כל ערך ממשי

פתרון

הפונקציה $f(x)$ היא מכפלה של שתי פונקציות רציפות על כל הישר. לכן היא פונקציה רציפה על כל הישר.
לפי משפט ערך הביניים, אם בנקודה מסוימת מתקבל ערך b ובנקודה אחרת מתקבל ערך a, אז בקטע שבין שתי הנקודות מתקבלים כל הערכים שבין a ל b.
נסתכל על ערך ממשי כלשהו b ונראה שהוא מתקבל באיזשהי נקודה. עבור כל ערך b קיימת נקודה x, $|b|<x$ שבה $\sin x=1$ וקיימת נקודה y, $|b|<y$ שבה $\sin y=-1$. בנקודות אלה מתקיים $x\cdot\ln x\cdot\sin x>|b|$ ו $y\cdot\ln y\cdot\sin y<-|b|$.
לכן קיימת נקודה z שבין x ל y שבה $z\cdot\ln z\cdot\sin z=b$.

שאלה (מבחינה של פרופ' לנג)

חשב $\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}$

פתרון

נציב $t=\sqrt{e^x}$:

$$dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^x}}\cdot e^x dx=\frac{\sqrt{e^x}}{2}dx$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx=\int\frac{2t}{t^2+t}dt=\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln(t+1)=$$

$$=2\ln\left(\sqrt{e^x}+1\right)$$

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'רק)
חשבו את הגבול (אם הוא קיים)

$$\lim_{n\to\infty} n^5\cdot e^{-\sqrt{n}}$$

__פתרון__
תחילה נוכיח שמתקיים $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$

מתקיים $x^{10}\cdot e^{-x}=\frac{x^{10}}{e^x}$. זו מנה של שתי פונקציות שלכל אחת מהן יש גבול ∞ כאשר $x\to\infty$. שתי הפונקציות גזירות מכל סדר. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל 10 פעמים. נשים לב שגזירת הפונקציה שבמכנה נותנת את עצמה. אחרי 10 גזירות של הפונקציה שבמונה נקבל 0. לכן הגבול הוא 0.

כעת נשתמש בטענה זו כדי להוכיח את הנדרש.
מכיוון ש- $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$ אז עבור $\varepsilon>0$ נתון, קיים T סופי כך שעבור כל $T<\sqrt{n}$ מתקיים

$|e^{-\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n})^{10}|<\varepsilon$. כך עבור כל $\varepsilon>0$, ולכן הגבול הוא 0.
