**פתרונות מקוצרים לשאלות**
**מבחינות בחדו"א לפיסיקאים**
**שלומי**

## שאלה (מבחינה של פרופ' איידלמן)

הוכח או הפרך
אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ($0<a_n$ לכל $n$) מונוטונית יורדת
אז טור $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

### פתרון

ניתן דוגמא נגדית $a_n=1+\frac{1}{n}$ ואז הסדרה מונוטונית יורדת.
אבל בטור $\sum(-1)^n a_n$ ההפרש בין הסכום עד מקום $n$ לבין
הסכום עד מקום $n+1$ גדול בערכו המוחלט מ $1$ תמיד,
לכן אין התכנסות (לפי תנאי קושי).

## שאלה (מבחינה של פרופ' איידלמן)

הוכח או הפרך: מתקיים $\lim_{x\to\infty}\left(e^{x^2}\cdot e^{-e^x}\right)=0$.

### פתרון

מתקיים $e^{x^2}\cdot e^{-e^x}=e^{x^2-e^x}$. $e^x$ גדל מהר יותר מאשר $x^2$
ולכן הגבול של המעריך הוא $-\infty$ והגבול כולו הוא $0$.
(אפשר לראות באמצעות הכלל של לופיטל ש $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$).

## שאלה (מבחינה של פרופ' איידלמן)

הוכח או הפרך
אם $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ גזירה בקטע $(0,1)$,
$f(0)=f(1)=0$ אז $f'(\frac{1}{2})=0$ ו $x=\frac{1}{2}$ נקודת קיצון מקומי!

### פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. $f(x)=x(1-x)(x-\frac{1}{2})^3$
הנגזרת של $f(x)$ בנקודה $\frac{1}{2}$ היא $0$ כי בכל חלק* של הנגזרת
נשאר $(x-\frac{1}{2})$ עם אקספ' חזקה חיובית. $f(x)$ מחליפה
סימן בנקודה $\frac{1}{2}$ (*לפי גזירה של מכפלה).

**פתרונות מקוצרים לשאלות**
**מבחינות בחדו"א לפיסיקאים**
**שלומי**

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך:
אם $f'(x)\ge g'(x)$ לכל $0\le x$ ו- $f(0)=g(0)$ אז $f(x)\ge g(x)$ לכל $0\le x$.

**פתרון**

נראה שהטענה נכונה. נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$.
מתקיים $h'(y)\ge 0$ לכל $0\le y$. עבור כל $x$ מתקיים
$h(x)=h(0)+h'(y)(x-0)$ כאשר $y$ נקודה בין $0$ ל $x$ ו $h(0)=0$.

---

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך
אם $f'(x)>0$ בקטע $[a,b]$ אז הגרף של $f(x)$ מעל
המיתר שמחבר $(a,f(a))$ עם $(b,f(b))$.

**פתרון**

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית:
בקטע $[1,2]$ נגדיר $f(x)=x^2$. מתקיים $f'(x)>0$
והגרף הינו מתחת למיתר.

---

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הסדרה $a_n$ מקיימת $|a_{n+1}-a_n|<\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$.
הוכח כי הסדרה מתכנסת.

**פתרון**

נראה שהסדרה מקיימת את תנאי קושי. עבור $n<m$ מתקיים
אי השוויון $|a_m-a_n|\le|a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+\dots$
$+|a_m-a_{m-1}|$ (אי שוויון המשולש)

וזה לא גדול מ $\sum_{i=n}^{m-1}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-5}$ שקטן מהטור

האינסופי $\sum_{i=n}^{\infty}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-5}=\frac{\pi\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}}{1-\frac{1}{3}}$. עבור כל $0<\varepsilon$ קיים
$N$ כך שעבור כל $N<n$, סכום זה קטן מ $\varepsilon$.

**פתרונות מקוצרים לשאלות**
**מבחינות בחדו"א לפיסיקאים**
**שלומי**

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

כמה שורשים ממשיים יש למשוואה $3|x|=e^x$ ?

### פתרון

תחילה נבדוק כמה שורשים אי-שליליים יש למשוואה.
עבור $x\ge 0$ נגדיר פונקציה $h(x)=e^x-3x$.
מספר הפעמים שהפונקציה מתאפסת עבור $x\ge 0$ שווה למספר השורשים של המשוואה ב $x\ge 0$.
מתקיים $h'(x)=e^x-3$ ; מתקיים $h'(x)<0$ עבור $\ln(3)>x\ge 0$ ולכן בגלל מונוטוניות הפונקציה יש לכל היותר שורש אחד בקטע $\ln(3)>x>0$, מתקיים $h'(x)>0$ עבור $\ln(3)<x$ ולכן בגלל מונוטוניות הפונקציה יש לכל היותר שורש אחד עבור $\ln(3)<x$. מכיוון ש $h(0)>0$, $h(\ln(3))<0$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=+\infty$, אז יש שורש אחד בין 0 ל $\ln(3)$ ושורש אחד בין $\ln(3)$ ל $\infty$, לכן יש שני שורשים אי-שליליים.

עבור $x<0$ מספר השורשים שווה למספר נקודות ההתאפסות של $g(x)=e^x+3x$, מתקיים $g'(x)>0$ עבור כל $x<0$.
$g(0)>0$ ! ו $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ולכן יש שורש שלילי אחד.

---

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך
לכל שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$$

---

### פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^{n+1}$, $b_n=(-1)^n$. אז $a_n+b_n=0$ לכל $n$ אך

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=2$$

---

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

## שאלה (מבחינה של פרופ' אייזלמן)

תהי $f(x)$ גזירה שלוש פעמים ב $[-1,1]$ ו- $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$. הוכח כי:

(i) הטור $\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ מתבדר.

(רמז: השתמש בנוסחת טיילור עבור $n=2$).

## פתרון

מכיוון שהפונקציה גזירה שלוש פעמים בקטע אז הנגזרת השניה שלה רציפה (הנגזרת של הנגזרת השניה היא הנגזרת השלישית ואין נגזרת לפונקציה לא רציפה), מכיוון שהיא רציפה אז לערך המוחלט שלה יש חסם אחיד שנקרא לו $d$.

לפי נוסחת טיילור

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+f''(c)\cdot\frac{(x-0)^2}{2}$$

כאשר $c$ נקודה בין $0$ ל $x$.

מתקיים $\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \le 0+\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n^2}\right|+\frac{d}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)^2$

הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס. היחס $\frac{\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n^2}\right|+d/2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\frac{1}{n^2}}$ שואף לקבוע כאשר $n\to\infty$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס (טור הערכים המוחלטים מתכנס ולכן הטור מתכנס).

מתקיים $f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)=0+f'(0)\frac{1}{n\ln(n)}+\frac{c_n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2$

כאשר $c_n$ הם קבועים שמותאמים לn-ים, מתקיים $|c_n|\le d$.

קיים קבוע $N$ כך שעבור כל $n>N$: $\frac{d}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2<\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n\ln(n)}/2\right|$ כאשר 2 הוא קבוע שרירותי.

לכן החל מאותו $N$ איברי הטור $f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ אינם מחליפים סימן ובמוכן החל מאותו מקום מתקיים למשל $\left|f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right|\ge\left|\frac{f'(0)}{2}\cdot\frac{1}{n\ln(n)}\right|$. לכן על-פי מבחן ההשוואה הטור מתבדר (הטור $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ מתבדר שאליו משווים).

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

תהי $f(x)$ גזירה ב $(0,+\infty)$ המקיימת $f'(x)>x$ לכל $x>0$.
הוכח כי $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה ב $(0,+\infty)$.
רמז: הוכח תחילה כי לכל $0<x<y$ מתקיים
$f(y)-f(x)\geq (y-x)x$.

---

**פתרון**

לפי משפט לגרנז' $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$
כאשר $c$ היא נקודה בין $x$ ל $y$
מתקיים $f'(c)>c$ ומכיון ש $c>x$ אז $f'(c)>x$
וטענת הרמז מתקבלת.
כדי ש $f(x)$ תהיה רציפה במידה שווה, צריך שעבור כל $\varepsilon>0$ יהיה קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|\leq\delta$ אז $|f(y)-f(x)|\leq\varepsilon$. נבחר למשל $\varepsilon=0.5$. אז
עבור כל $\delta>0$ נבחר $x>\frac{1}{\delta}$ ואז נבחר $x$ ו $y$
במרחקים מרחק של $\delta$ זה מזה:
$$|f(y)-f(x)|\geq\delta\cdot\frac{1}{\delta}=1>0.5$$
וזו סתירה לרציפות במידה שווה.

---

## שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח
$$\frac{2}{3\pi}\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\leq\frac{1}{\pi}$$

---

**פתרון**

עבור כל $2\pi\leq x\leq 3\pi$ מתקיים $\sin x\geq 0$. מתקיים
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\geq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{3\pi}\,dx=\frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{3\pi}\Big[-\cos x\Big]_{2\pi}^{3\pi}=\frac{2}{3\pi}$$
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{2\pi}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}$$

**פתרונות מקוצרים לשאלות**
**מבחינות בחדו"א לפיסיקאים**
**שלומי**

## שאלה (מבחינה של פרופ' אוידמן)

הוכח או הפרך: אם $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקטע $[0,+\infty)$ אז $f(x)$ חסומה ב $(0,+\infty)$.

## פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. נגדיר $f(x)=\sqrt{x+1}$ אז כמובן ש $f(x)$ לא חסומה. אך לפי משפט לגרנז' מתקיים $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$ כאשר $c$ היא נקודה בין $x$ ל $y$. אך $f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c+1}}<\frac{1}{2}$. עבור $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=\varepsilon$ כך אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(y)-f(x)|<\frac{1}{2}\delta<\varepsilon$.

---

## שאלה (מבחינה של פרופ' אוידמן)

הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n\geq 0$ מתכנס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ גם מתכנס. האם זה נכון גם ללא תנאי $a_n\geq 0$?

## פתרון

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז קיים $N$ כך שעבור כל $n>N$ מתקיים $a_n<1$, מכיון שעבור כל $0\leq a_n<1$ מתקיים $0\leq a_n^2\leq a_n$ אז לפי קריטריון ההשוואה הטור מתכנס.

אבל אי אפשר לוותר על התנאי $a_n\geq 0$: $\sum (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתכנס כי זהו טור שבו הערכים המוחלטים שואפים לאפס מונוטונית והסימנים מתחלפים.
אך $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ – אין התכנסות.