

תורת הגרפים

לתלמידי מחימטיקה שנים ב-ג

המורה: ד"ר נוגה אלון

משך הבחינה:

ענה על 6 מתוך 7 השאלות הבאות.

מותר להשתמש בכל חומר עזר.

השתדל לא לכתוב יותר מעמוד אחד כפתרון לכל שאלה.

שאלה 1

-----

כמה גשרים, לכל היותר, יכול להכיל גרף  $G$  רגולרי בעל  $n$  צמתים?

שאלה 2

-----

הראה דוגמה של גרף פשוט בעל ערכיות מינימלית  $\delta = 4$  ללא משולשים.

שאלה 3

-----

הראה שאם  $G$  גרף קשיר, וכל ערכיותו זוגית, הרי לכל צומת  $v$  בעלת ערכיות  $d(v)$  ב- $G$ , מספר רכיבי הקשירות של  $G-v$  אינו עולה על  $\frac{1}{2} d(v)$ .

שאלה 4

-----

יהא  $G=(V,E)$  גרף דו צדדי בעל קבוצות צמתים  $X$  ו- $Y$  ונניח כי לכל  $S \subseteq X$   
 $N(S) = \{y \in Y : \exists x \in S, xy \in E\}$  באשר  $|N(S)| \geq 2|S|$

הוכח כי קיים תת גרף של  $G$  בו לכל צומת של  $X$  ערכיות בדיוק 2, ולכל צומת של  $Y$  ערכיות לכל היותר 1.

שאלה 5

-----

מהו האינדקס הכרומטי  $\chi'(K_{201})$  של הגרף השלם על 201 צמתים?

שאלה 6

-----

א. הראה כי כל גרף פשוט בעל  $2k$  צמתים ופחות מ-  $k^2 - k$  קשתות מכיל תת קבוצה בלתי חלופה מגודל 3.

ב. הראה דוגמא של גרף פשוט בעל  $2k$  צמתים ו-  $k^2 - k$  קשתות שאינו מכיל תת קבוצה בלתי חלופה מגודל 3.

שאלה 7

-----

יהא  $G$  גרף מישורי פשוט בעל  $n$  צמתים ובעל ערכיות מינימלית  $\delta(G) = 5$ .

- א. הראה כי  $n \geq 12$ .
- ב. הראה כי אם  $n = 12$  הרי  $G$  קשיר.

בהצלחה!!!