

מועד א' סמסטר א' תשמ"ז
4.3.87

היברטיסח תל-אביב
קולסה למועים מדויקים
פרימונד ובברלי סאקלר

תורת הגרפים
לתלמידי מחימטיקה שנים ב-ג
המורה: דייר נגה אלון

הבחינה: 3 שעות
להשתמש בכל חומר עזר.
ל/י לא לכתוב יותר מעמוד אחד כפתרון לכל שאלה.
ענה/י על כמה שתוכל/י.
הבחינה יקבע כדלקמן:
סך הציון לפי 5 תשובותיך הטובות ביותר.
סך הציון לפי 2 התשובות הנוספות.

שאלה 1

הבא או הבא דוגמא נגדית לטענות הבאות:

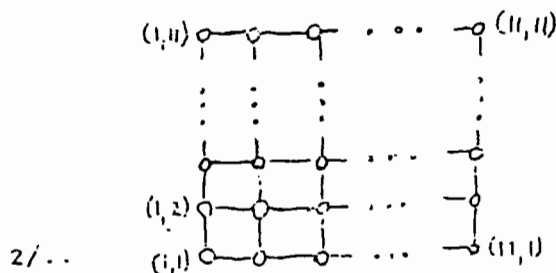
לכל גרף פשוט $G = (V, E)$ קיימת צומת $v \in V$ כך
 $\chi(G - v) < \chi(G)$

כל גרף פשוט G קשיר (בצמתים) הוא המילטוני.

שאלה 2

בגרף שצמתיו הן 120 נקודות הסריג הבאות:

$\{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 11\}$ ובו הצומת (i, j) מחוברת לצומת (i', j')
 אם ורק אם: $|i - i'| + |j - j'| = 1$ יש מעגל המילטוני? הוכחו



שאלה 3

האם קיים גרף מישורי פשוט בעל 10 צמתים שסדרת הדרגות שלו היא 7, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6. (הוכח שלא קיים כזה, או הבא דוגמא לגרף כזה).

שאלה 4

יהיו H_1, H_2, \dots, H_n תת גרפים שלמים של הגרף השלם K_n על n צמתים, ונניח שלכל אחד מה- H_i יש פחות מ- $n/2$ צמתים ושכל קשת של K_n היא קשת של בדיוק $n/2$ מה- H_i . הוכח כי: $n \geq 2$.

שאלה 5

יהא G גרף פשוט k רגולרי בעל מספר אי זוגי של צמתים. מהו האינדקס הכרומטי $\chi'(G)$? הוכח.

שאלה 6

יהא $G=(V, E)$ גרף דו צדדי על קבוצות הצמתים X ו- Y , ונניח שלכל קשת $(x, y) \in E$ עבורה $x \in X$ ו- $y \in Y$ קיים $d(y) \leq d(x)$. זיווג המרווה את כל צמתי X . הוכח כי יש ב- G .

שאלה 7

תהיינה $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ ו- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ שתי פרמוטציות של המספרים $1, 2, \dots, n$. הוכח שקיימת פרנקציה $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ כך שלכל i , $1 \leq i \leq n$, יתקיים $|f(\pi_1) + f(\pi_2) + \dots + f(\pi_i)| \leq 1$

$$|f(\sigma_1) + f(\sigma_2) + \dots + f(\sigma_i)| \leq 1$$