פתרון לבחינה מ 19.09.23

שאלה 1

סעיף א'

הטענה נכונה.

למצב i נשנה חיובי ולא מחזורי יש הסתברות גבולית חיובית π_i . מכיון ש π_i הוא הגבול, אז החל ממקום מסוים כל האיברים הנסכמים גדולים מ $\frac{\pi_i}{2}$. לכן מדובר בסכום של אין סוף פעמים איברים הגדולים מקבוע חיובי.

הערות

אם איבר כללי לא שואף לאפס, אז הטור לא מתכנס.

לא תמיד כאשר סוכמים מספר אין סופי של אברי טור שמסתכם באין סוף, מקבלים סכום אין סופי.

אילו היה מדובר בהילוך מקרי על שריג דו מימדי, שהוא נשנה אפס, אז הסכום החלקי היה סופי, למרות שהסכום כולו הוא אין סוף.

המאורעות של חזרה למצב ההתחלתי בזמנים ריבועיים יכולים להיות תלויים.

התהליך בזמנים הריבועיים לא חייב להיות שרשרת מרקוב.

סעיף ב'

הטענה לא נכונה.

נניח שקבוצת המצבים היא של כל המספרים הטבעיים, ושכל שורות מטריצת המעבר הן זהות ושכל איבר במטריצת המעבר הוא שונה מאפס. במקרה זה כל המשתנים בסדרה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם ב"ת וכל ערך מתקבל בכל פעם בהסתברות חיובית ובאופן ב"ת בפעמים האחרות. כך כל ערך יתקבל אין סוף פעמים בהסתברות אחת.

הערות

אי אפשר להשתמש בחלק השני של הלמה של בורל קנטלי אם אין אי תלות.

צריך לתת דוגמא של שרשרת נשנית חיובית בעלת אין סוף מצבים. כאשר השרשרת היא בלתי פריקה ונשנית, אז בהסתברות אחת מבקרים בכל מצב.

סעיף ג'

הטענה לא נכונה.

נתן דוגמא שלגביה הטענה לא מתקיימת.

התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יהיה של הילוך מקרי לא סימטרי על חצי ישר. ממצב 0 עוברים בהכרח למצב 1, ומכל מצב אחר הולכים בסיכוי 0.6 ימינה ובסיכוי 0.4 שמאלה.

לגבי התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{0,i} = \frac{1}{i(i+1)}$ ו $P_{i,i-1} = 1$. תוחלת מספר הצעדים של חזרה ממצב 0 לעצמו היא $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}(i+1) = \infty$ לכן המצב הוא נשנה אפס.

בפעם הראשונה שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ עוזב את מצב 0 , כל עוד מתקיים $(X_n \geq n)$ אז מתקיים $(X_n \geq Y_n)$. אם ממצב 0 עוברים ישירות למצב i אז זה קורה לפחות $\frac{i}{2}$ פעמים מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \cdot \frac{i}{2} = \infty$.

הערה

לא מספיק שכל ערך יתקבל אין סוף פעמים בתהליך אחד. הוא צריך להתקבל לפחות פעם אחת לפני שהוא מתקבל בתהליך האחר.

סעיף ד'

הטענה לא נכונה.

נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של השלמים האי שליליים.

נניח שעבור כל $i > 0$ מתקיים $P_{0,i} = 0.5^i$ ו $P_{i,0} = 0.5^i = 1 - P_{i,i}$.

אם ממצב 0 עוברים למצב i אז תוחלת מספר הצעדים לחזרה למצב 0 ממנו היא 2^i ובתוספת צעד ההגעה למצב i היא $2^i + 1$. תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i \left(2^i + 1\right) = \infty$. אבל בהכרח מבקרים רק במצב יחיד עד חזרה למצב 0.

הערה

בדוגמא זו, עבור כל מצב טבעי, תוחלת מספר הצעדים לחזרה למצב אפס היא סופית. אבל התוחלת השלמה היא אין סוף.

שאלה 2

הפונקציה היוצרת של המשתנה המקרי Z היא $g(t)$. הסיכוי להכחדות הוא בכל מקרה הפתרון החיובי הקטן ביותר של המשוואה $t = g(t)$. זו משוואה שהמעלה הגבוהה ביותר שיכולה להיות לה היא 3. הפתרון $t = 1$ הוא תמיד פתרון שלה. נחלק את הפולינום $t - g(t)$ בפולינום $t - 1$. יתקבל פולינום ממעלה לכל היותר 2 שהוא $h(t)$. נפתור את המשוואה $h(t) = 0$. אם יש לה פתרון חיובי קטן מ 1 , אז הוא מהווה את סיכויי ההכחדות. אחרת, סיכויי ההכחדות הם 1.

שאלה 3

סעיף א'

לא יתכן.

מצב נשנה הוא ארגודי. לאחר שמתחילים בו, ניתן לבקר בו רק בכפולות של המחזור שלו. החל מאיזשהו מקום סופי, ניתן לבקר בו בכל הכפולות של המחזור שלו. לכן הגבול שווה ל $\frac{1}{d}$ כאשר d הוא מספר שלם (המחזור של המצב).

סעיף ב'

זה יתכן.

נניח שהשרשרת היא אין סופית ושיש רק עבור כל אורך ששארית החלוקה שלו ב 5 היא 0 או 1 מסלול ממצב i למצב j שעובר במצבים אחרים. ממצב j יש רק מעבר ישיר למצב i. למצב i חייבים לחזור באיזשהו שלב. לכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

הערה

התשובה הזאת לא סותרת את העובדה שגם המחלק המשותף המכסימלי של זמני החזרה הראשונים שווה למחזור.

סעיף ג'

זה יתכן.

נניח שהשרשרת היא אין סופית ושיש רק עבור כל אורך ששארית החלוקה שלו ב 5 היא 0 או 1 מסלול ממצב i למצב j שעובר במצבים אחרים. ממצב j יש רק מעבר ישיר למצב סופג. כך אם מתחילים במצב i אז מבקרים במצב j רק פעם אחת.

שאלה 4

<u>סעיף א'</u>

זה יתכן.

נתן דוגמא של שרשרת בעלת שני מצבים ויוצר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לכל מצב יש הסתברות סטציונרית של חצי. זמן החזרה למצב מתפלג מעריכית עם פרמטר 1 והוא בעל תוחלת של 1.

<u>סעיף ב'</u>

זה יתכן.

נתן דוגמא של שרשרת בעלת שני מצבים ויוצר

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

לכל מצב יש הסתברות סטציונרית של חצי. זמן החזרה למצב מתפלג מעריכית עם פרמטר 0.5 והוא בעל תוחלת של 2.

<u>סעיף ג'</u>

זה יתכן.

אם קצב העזיבה של כל מצב הוא אותו קצב (אותו ערך בכל המקומות על האלכסון של היוצר האינפיניטיסימלי) אז יש אותן התפלגויות סטציונריות בזמני הקפיצות ולאורך זמן (כי לכל שהות במצב תהיה אותה התפלגות ואותה תוחלת). נדאג שמטריצת המעבר בזמני הקפיצות תהיה של שרשרת נשנית חיובית.

<u>סעיף ד'</u>

זה יתכן.

נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של השלמים האי שליליים. עבור כל מצב i , ממצב 0 עוברים למצב i בעצמה 0.5^i וממצב i עוברים למצב 0 בעצמה 1. בקפיצות חוזרים למצב התחלתי רק בזמנים זוגיים.

<u>הערה</u>

אין לתת כאן דוגמא שבה תוחלת מספר הקפיצות עד חזרה היא אין סוף. במקרה כזה אין התפלגות סטציונרית, אבל יש הסתברויות גבוליות של אפסים.

שלומי