מועד ב' סמסטר ב' תשפ"ג
19.09.23

<u>בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בארבע השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
בסעיפים בהם אתם טוענים שמשהו יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u> (36 נקודות)
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

<u>א</u>. אם i הוא מצב נשנה חיובי ולא מחזורי בשרשרת מרקוב אז $\sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(n^2)} = \infty$.

<u>ב</u>. אם $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית חיובית שכל מצביה הם שלמים חיוביים, אז קיים קבוע סופי M כך שבהסתברות אחת יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות $(X_n > M)$.

<u>ג</u>. נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הן שרשרות מרקוב בלתי פריקות שקבוצת המצבים של כל אחת מהן היא של השלמים האי שליליים. נניח שמצבי השרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם נשנים ושמתקיים $(X_0 = 0)$ ונניח שמצבי השרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם חולפים ושמתקיים $(Y_0 = 0)$.
מתקיים שתוחלת מספר ערכי ה n שעבורם $(X_n \geq Y_n)$ היא סופית.

<u>ד</u>. אם i הוא מצב נשנה אפס בשרשרת מרקוב, אז תוחלת מספר המצבים <u>השונים</u> שבהם מבקרים החל מהפעם הראשונה שעוזבים אותו ועד הפעם הראשונה שחוזרים אליו אחר כך, היא בהכרח אין סופית.

<u>שאלה 2</u> (9 נקודות)
יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$. נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו שמתפלג המשתנה המקרי Z . נניח שהמשתנה המקרי Z יכול לקבל רק ערכים שלא גדולים מ 3. נניח שאנו יודעים מהי ההתפלגות של המשתנה Z.

הראו איך באמצעות שימוש באלגוריתם לחלוקת פולינומים ובאמצעות שימוש באלגברה שנלמדת בבית הספר (יסודי או תיכון) ניתן לחשב את הסיכוי שהתהליך יגיע אי פעם להיכחדות.

שאלה 3 (27 נקודות)

יהיו i, j שני מצבים בשרשרת מרקוב. רק בסעיפים א' וב' נניח שהם מצבים נשנים.

תהי A קבוצה של מספרים טבעיים. מספר טבעי n שייך לקבוצה A אם ורק אם מתקיים $P_{i,i}^{(n)} > 0$.

תהי B קבוצה של מספרים טבעיים. מספר טבעי n שייך לקבוצה B אם ורק אם מתקיים $f_{i,i}^{(n)} > 0$.

תהי C קבוצה של מספרים טבעיים. מספר טבעי n שייך לקבוצה C אם ורק אם מתקיים $P_{i,j}^{(n)} > 0$.

עבור כל M טבעי, תהיה E_M קבוצת המספרים הטבעיים שלא גדולים מ M ויהיו

$a_M = \frac{|A \cap E_M|}{|E_M|}$, $b_M = \frac{|B \cap E_M|}{|E_M|}$, $c_M = \frac{|C \cap E_M|}{|E_M|}$.

כאשר, כרגיל | | מסמן גודל של קבוצה.

א. האם יתכן שיתקיים $\lim_{M\to\infty} a_M = 0.4$?

ב. האם יתכן שיתקיים $\lim_{M\to\infty} b_M = 0.4$?

ג. האם יתכן שיתקיים $\lim_{M\to\infty} c_M = 0.4$?

שאלה 4 (36 נקודות)

תהי $\{X(t)\}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה בזמן רציף. נניח שבתהליך בזמן רציף לכל מצב i יש הסתברות סטציונרית וגבולית חיובית π_i. יהי E_i תוחלת זמן החזרה הראשונה למצב i לאחר שעוזבים אותו (ההפרש בין זמן החזרה הראשונה וזמן העזיבה הראשונה).

א. האם יתכן שעבור כל מצב i יתקיים $\pi_i < \frac{1}{E_i}$?

ב. האם יתכן שעבור כל מצב i יתקיים $\pi_i = \frac{1}{E_i}$?

ג. האם יתכן שהשרשרת $\{X(t)\}$ היא אין סופית ובתהליך בזמני הקפיצות של השרשרת $\{X(t)\}$ לכל מצב i יש הסתברות גבולית ששווה ל π_i (אותה הסתברות כמו בגבולית של התהליך בזמן רציף) ?

ד. האם יתכן שהשרשרת $\{X(t)\}$ היא אין סופית ובתהליך בזמני הקפיצות של השרשרת $\{X(t)\}$ לכל מצב i אין הסתברות גבולית ?
