

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בחמש השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
בסעיפים בהם אתם טוענים שמהו יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה!

שאלה 1 (27 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בת תשעה מצבים. נניח שמצב 1 הוא אחד ממצבי השרשרת.

- א. כמה מצבים חולפים קיימים בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לכל היותר?
ב. רק בסעיף זה נניח שלא קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(2n)}$.
ג. כמה מצבים חולפים קיימים בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לכל היותר?
ד. מספר טבעי t יקרא מוכר אם קיים בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לפחות מצב אחד שהמחזור שלו הוא אותו t .
כמה מספרים טבעיים מוכרים קיימים בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לכל היותר?

שאלה 2 (36 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף $\{X(t)\}$ של מערכת תור. מופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעצמה 1. קיים שרת יחיד היכול בזמן נתון לשרת לכל היותר צרכן אחד. משך כל שרות מתפלג מעריכית עם פרמטר 1. בתחנה יש מקום המתנה יחיד. צרכן המגיע לתחנה כאשר השרת עסוק, נכנס לעמדת ההמתנה אם ורק אם היא לא תפוסה באותו רגע. כך אף פעם אין יותר משני צרכנים במערכת. נניח שמתקיים $X(0) = 0$.

- א. מצאו את מטריצת המעבר בזמני הקפיצות של התהליך $\{X(t)\}$.
ב. מהו לאורך זמן אחוז הלקוחות הנידחים מקרב המגיעים לתחנה?
ג. מהי תוחלת מספר הצרכנים שמגיעים לתחנה החל מהרגע הראשון שהתהליך $\{X(t)\}$ מגיע למצב 2, ועד הרגע הראשון שהתהליך $\{X(t)\}$ עוזב את מצב 2?
ד. מהו $\lim_{t \rightarrow 0} P_{0,1}'(t)$ (מדובר על גבול של נגזרת).

שאלה 3 (18 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. יהי A המאורע שהתהליך מגיע להיכחדות אי פעם.

א. האם יתכן שקיים קבוע טבעי k כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+k} = 0 | X_n > 0) = 1$?

ב. האם יתכן שיתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A | X_n > 0) = 1$?

שאלה 4 (18 נקודות)

נתונים שני מטבעות. ידוע שאחד משני המטבעות נופל תמיד על "פלי" ושהמטבע האחר נופל בכל הטלה בסיכויים שווים על "פלי" ועל "עץ", וזאת באופן ב"ת בין ההטלות השונות. בתחילה אין לנו כל מושג מיהו המטבע ההוגן, ואנו מניחים שלכל אחד מהמטבעות יש סיכוי של חצי להיות המטבע ההוגן. אנו מבצעים סדרה אין סופית של הטלות, כך שבכל שלב אנו מטילים מטבע שסביר יותר על סמך התוצאות הקודמות שהוא המטבע ההוגן. בשלב בו לשני המטבעות יש סיכוי שווה להיות המטבע ההוגן, אנו בוחרים בסיכוי שווה באחד המטבעות ומטילים אותו.

יהי X_n - המספר הכולל של תוצאות "פלי" שהתקבלו עד וכולל השלב n .
יהי Y_n - ההסתברות שנוכל לבחור נכון במטבע ההוגן לאור תוצאות n ההטלות הראשונות.

א. האם התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב ?

ב. האם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב ?

שאלה 5 (9 נקודות)

האם קיימת שרשרת מרקוב שבה יש אין סוף מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס ?
