פתרון לבחינה מ 08.09.22

שאלה 1

א. יהיה בהסתברות 1.
התהליך $X_n - Y_n - Z_n$ עושה בכל שלב צעד אחד ימינה בסיכוי חצי וצעד אחד שמאלה בסיכוי חצי. לכן זהו הילוך מקרי על הישר. כהילוך מקרי סימטרי שהוא שרשרת בלתי פריקה ונשנית על כל נקודות הישר הוא מגיע באיזשהו שלב לכל נקודה על הישר. לכן בהסתברות 1 הוא מגיע באיזשהו שלב לחיובים ואז אי השיוויון מתקיים.

ב. עבור כל וקטור.
אם בלפחות אחד הצירים הולכים בכיוון אחד בסיכוי גדול יותר מאשר בכיוון אחר, אז לפי החוק החזק, בהסתברות 1 החל מאיזשהו שלב המרחק בציר זה מהראשית יהיה תמיד גדול מ cn עבור איזשהו c קבוע חיובי. במקרה כזה בודאי סכום הערכים המוחלטים יהיה גדול מספיק.
אם קיים ציר שבו הולכים בסיכוי שווה בשני הכיוונים, אז לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות שבציר זה נהיה מרוחקים מהראשית ביותר מ $n^{0.5}$ שזה סדר גודל של סטיית התקן, שואפת לקבוע חיובי. כמובן שסכום הערכים המוחלטים אינו קטן מהמרחק בציר זה.

ג. אם ורק אם בלפחות אחד הצירים לא נלך בסיכוי שווה בשני הצירים.
ראינו בסעיף הקודם שאם קיים ציר כזה אז אין הסתברות גבולית של אפס להתקיימות האי שיווין.
אם בכל ציר הולכים בסיכוי שווה בשני הכיוונים, אז לפי משפט הגבול המרכזי, לגבי כל ציר, הסיכוי שהסטייה תהיה גדולה יותר מסדר גודל של סטיית התקן שואף לאפס. סטיית התקן אינה בסדר גודל גדול מ $n^{0.5}$.

שאלה 2

א. נתן דוגמא שבה זה קורה.

0	0.1	0.4	0.5	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1

לאחר שמתחילים במצב 1 מבקרים במצב 2 בכפולות של 3 בסיכוי 0.4 , בכפולות של 3 עם שארית 1 בסיכוי 0.1 ובכפולות של 3 עם שארית 2 בסיכוי 0.5 .

ב. 4
כדי שלא יהיה גבול המצב צריך להיות מחזורי. לכן הוא חייב להיות במחלקה עם לפחות עוד מצב אחד. יכולות להיות עוד שלוש מחלקות של מצבים סופגים.

ג. 3
אילו המצב לא היה מחזורי אז היה קיים גבול יחיד לסדרה $\left\{P_{1,1}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ואז היה קיים גם גבול יחיד לתת הסדרה שלה $\left\{P_{1,1}^{(2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. אילו למצב היה מחזור של 2 אז היה קיים גבול יחיד לסדרה $\left\{P_{1,1}^{(2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. לכן המצב חייב להיות בעל מחזור של לפחות 3. אם הוא בעל מחזור 3 אז

לא קיים הגבול לסדרה $\left\{P_{1,1}^{(2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. במקרה כזה יש במחלקתו לפחות שלושה מצבים. יכולות להיות עוד שתי מחלקות של מצבים סופגים.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. זה יתכן.
נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו ש Z מתפלג.
נניח שמתקיים $P(Z=0)=P(Z=100)=0.001$, $P(Z=1)=0.998$.
אם נגיע למצב 100 לפני שנגיע למצב 0, אז הסיכוי להכחדות הוא אפסי.
נוכל גם לראות שלמשוואה $t=g(t)$ יש פתרון בין 0.5 ל 0.51 .
$g(t)-t$ מחליפה סימן בין 0.5 ל 0.51 :

$$0.01+0.98\cdot 0.5+0.01\cdot 0.5^{1000}>0.5$$
$$0.01+0.98\cdot 0.51+0.01\cdot 0.51^{1000}<0.51$$

<u>ב</u>. זה יתכן.
נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו ש Z מתפלג.
נניח שמתקיים $P(Z=0)=P(Z=1000)=0.5$.
אם אין הכחדות בדור הראשון, אז מאוד לא סביר שאי פעם תהיה הכחדות.
נוכל גם לראות ש $g(t)-t$ מחליפה סימן בין 0.5 ל 0.51 .

$$0.5+0.5\cdot 0.5^{1000}>0.5$$
$$0.5+0.5\cdot 0.51^{1000}<0.51$$

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. כן.
מספר הלקוחות שבמערכת הוא תהליך של תור עם שרת אחד ואין סוף מקומות המתנה עם קצבים מעריכיים. קצב השרות הוא 0.5 ולא 1, כי אירוע של סיום שרות עם חזרה לתור לא משנה את מצב המערכת. הוא לא משנה את מספר הלקוחות שבמערכת.

<u>ב</u>. מערכת תור כזאת היא נשנית אם"ם קצב ההגעה לא גדול מקצב השרות. לכן דרוש שקצב ההגעה יהיה לא גדול מ 0.5 . לגבי כל מצב, נבקר בו אין סוף פעמים אם"ם המערכת נשנית.

<u>ג</u>. עבור כל ערך של קצב הגעה.
בכל נקודת זמן יש מספר סופי כלשהו של לקוחות. כל לקוח שיגיע יתקבל לשרות לאחר סיום שרות אחד של המספר הסופי של לקוחות שנמצאים בתחנה בזמן הגעתו. זה יקרה גם אם המערכת היא חולפת.

<u>ד</u>. יהי $e_{0,2}$ תוחלת זמן ההגעה ממצב 0 למצב 2. יהי $e_{1,2}$ תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 2.
מתקיים:

$$\begin{cases} e_{0,2}=\dfrac{1}{\lambda}+e_{1,2} \\ e_{1,2}=\dfrac{1}{0.5+\lambda}+\dfrac{0.5}{0.5+\lambda}e_{0,2}+\dfrac{\lambda}{0.5+\lambda}\cdot 0 \end{cases}$$

שלומי