פתרון לבחינה מ 14.09.21

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתן דוגמא שתראה יתכנות.

א. נתן דוגמא של תהליך סוכסטי שמצביו הם כל השלמים ושמצבו ההתחלתי הוא הראשית. נניח שבכל שלב חוץ משלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה. בשלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה אם בשלב 2 לא היינו במצב 0 , ואם כן היינו בשלב 2 במצב 0 אז עושים בסיכוי שווה שני צעדים ימינה או שני צעדים שמאלה. כך ההסטוריה הקודמת נותנת מידע נוסף על ערכו של המשתנה התשיעי.

ב. נתן דוגמא של תהליך סטוכסטי שמצביו הם כל השלמים ושמצבו ההתחלתי הוא הראשית. נניח שבכל שלב חוץ משלב 8 עושים בסיכוי שווה צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה. בשלב 8 עושים בסיכוי שווה שני צעדים ימינה או שני צעדים שמאלה. אם ידועה התקופה אז כל המידע ניתן על ידי המשתנה הקודם האחרון. אבל המעברים תלויים בתקופה.

ג. נתן דוגמא של הילוך מקרי סימטרי על הישר. המשנה ה n חסום בערכו המוחלט על-ידי n , לכן סדרת המשתנים היא סדרת משתנים שערכם המוחלט חסום. אבל כל מצבי השרשרת הם נשנים אפס ולכן בעלי הסתברות גבולית של אפס, לכן עבור כל M סופי, ההסתברות שהערך המוחלט של המשתנים גדול ממנו, שואפת ל 1 , ולכן התוחלות שואפות לאין סוף.

ד. נתן דוגמא של שרשרת על החזקות השליליות, חיוביות ואפס של 2. בכל שלב המשתנה שווה לפעמיים המשתנה הקודם בסדרה או למחצית המשתנה הקודם בסדרה. כך התוחלת של כל משתנה בהינתן ערכו של המשתנה הקודם שווה ל $0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 2$ כפול ערכו של המשתנה הקודם. כל המצבים הם נשנים אפס (שינוי שמות המצבים של הילוך מקרי סימטרי).

ה. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא החזקות האי שליליות של 2. נניח שבכל שלב עוברים בסיכוי שווה למצב שערכו כפליים ערכו של המצב הקודם או למצב 1. לפי הלמה של בורל קנטלי חוזרים למצב 1 בהסתברות 1 אין סוף פעמים. השרשרת היא בלתי פריקה, ולכן כל המצבים נשנים.

שאלה 2

נראה שתוחלת מספר הדורות עד הכחדות היא סופית.

בכל דור עד שמגיעים להכחדות יש לפחות פרט אחד. לכן מספר הדורות עד הכחדות לא יכול להיות גדול מהמספר הכולל של הפרטים שיולדו בכל הדורות. לכן תוחלת מספר הדורות עד הכחדות לא גדולה מתוחלת מספר הצאצאים שיולדו בכל הדורות.

כאן תוחלת גודל הדור ה n היא $0.75^n = (0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2)^n$.

מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} 0.75^n < \infty$.

<u>הערה</u>

משתנה מקרי שמקבל בהכרח ערך סופי הוא לא בהכרח בעל תוחלת סופית. לכן כאן לא מספיק להסתמך על כך שהתהליך נכחד בודאות.

<u>שאלה 3</u>

כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים. לכן אין סוף פעמים נבקר במצב 1. לאחר כל ביקור כזה, בסיכוי חצי נגיע מייד בשלב הבא למצב 0 , וזאת באופן ב"ת בין ביקור לביקור. לכן ההתפלגות היא $G(0.5)$.

<u>הערה</u>

כדי שההתפלגות תהיה גיאומטרית חיוני שעד שנגיע למצב 0 שום ביקור במצב 1 לא יהיה אחרון, כך תמיד תהיה עוד הזדמנות להגיע למצב 0 , אם עד עכשיו לא הגענו אליו. אילו היה מדובר בהילוך שמוטה ימינה, אז יתכן שלא היינו כלל מבקרים במצב 0 , והמשתנה לא היה בכלל מוגדר.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. הסיכוי הוא שליש.
בקפיצה הראשונה נעזוב את מצב 1. מכל מצב אחר הסיכוי לקפוץ למצב 1 הוא שליש.

<u>ב</u>. הסיכוי הוא רבע.
בשרשרת בלתי פריקה בזמן רציף, ההסתברות הגבולית להיות בכל מצב תמיד שווה להסתברות הסטציונרית שלו.

<u>ג</u>. בשרשרת זו עוזבים מצב שבו נמצאים בקצב 3. אפשר לתאר גם את התהליך ככזה שמחכים זמן המתפלג $exp(4)$ ואז בסיכוי רבע נשארים במצב ובסיכוי שלושה רבעים עוברים למצבים האחרים. כך לאחר זמן המתפלג $exp(4)$ הסיכויים להיות בארבעת המצבים השונים הם סימטריים. בהסתברות $e^{-2\cdot 4} = e^{-8}$ הנקודה הזאת תתרחש רק לאחר הזמן 2.
לכן הסיכוי המבוקש הוא $e^{-8}\cdot 1 + 0.25(1-e^{-8}) = 0.25 + 0.75e^{-8}$.

<u>ד</u>. הסיכוי הוא e^{-3} .
קצב המעבר לקבוצת המצבים $\{2,3\}$ הוא 2 , בלי קשר לכך אם נמצאים במצב 1 או במצב 4.
לכן הסיכוי המבוקש הוא שמשתנה $exp(2)$ יקבל ערך גדול מ 1.5 .

<u>ה</u>. הסיכוי לכך הוא אפס.
אין סוף פעמים קופצים ממצב 2 למצבים 3 ו 4. כל קפיצה כזאת היא בסיכוי שווה לשני המצבים. ההפרש בין מספר הקפיצות למצבים 3 ו 4 מקבל בהסתברות 1 אין סוף פעמים ערך חיובי ואין סוף פעמים ערך חיובי כפי שהילוך מקרי מבקר אין סוף פעמים בחיובים ואין סוף פעמים בשליליים.

שלומי