© כל הזכויות שמורות
מסמך זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו או להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון לבחינה מ 24.06.21

שאלה 1

יהי $e_{k,0}$ – תוחלת זמן ההגעה ממצב k למצב 0.
כשנמצאים במצב 1 עושים צעד ואז בסיכוי 0.8 כבר מגיעים למצב 0 ובסיכוי 0.2 עוברים למצב 2. לכן מתקיים $e_{1,0} = 1 + 0.8 \cdot 0 + 0.2e_{2,0}$. כשנמצאים במצב 2 צריך לפני שמגיעים למצב 0 להגיע למצב 1 ואז להגיע ממצב 1 למצב 0 . לכן $e_{2,0} = e_{2,1} + e_{1,0}$. מכיון ש $e_{2,1} = e_{1,0}$ אז מתקיים $e_{2,0} = 2e_{1,0}$. לכן מתקיים $e_{1,0} = 1 + 0.4e_{1,0}$. לכן מתקיים $e_{1,0} = \frac{5}{3}$ ו $e_{2,0} = \frac{10}{3}$.

שאלה 2

א. בשרשרת בת שני מצבים שכיחות המעברים מהמצב הראשון לשני שווה לשכיחות המעברים מהמצב השני למצב הראשון. לכן לגבי כל וקטור סטציונרי חל תנאי האיזון המפורט.
הערה
אם המצבים לא מקושרים אז שכיחות המעברים בין מצבים שונים היא אפס והתנאי מתקיים.

ב. יש לפחות 5 מצבים.
בכל מחלקה בלתי פריקה יש וקטור סטציונרי יחיד. כל קומבינציה של וקטורים סטציונרים של מחלקות שונות היא וקטור סטציונרי. אם בכל אחת מהמחלקות הוקטורים הסטציונרים מקיימים את תנאי האיזון המפורט, אז גם הקומבינציות שלהם מקיימת את תנאי האיזון המפורט. אם באחת מכמה מחלקות יש וקטור שלא מקיים את תנאי האיזון המפורט אז יש אין סוף קומבינציות שלא מקיימות את תנאי האיזון המפורט. לכן כדי שיתקיימו תנאי שאלה זו, צריך שיהיו לפחות זוג מחלקות שבהן כל וקטור מקיים את תנאי האיזון המפורט ולפחות מחלקה אחת שבה וקטור שלא מקיים את תנאי האיזון המפורט. שתי המחלקות שמקיימות את התנאי יכולות להחיל מצב בודד כל אחת. המחלקה שלא מקיימת את התנאי צריכה לפי סעיף א' לכלול יותר משני מצבים. היא יכולה להחיל שלושה מצבים (למשל מחלקה בת מחזור 3). לכן בסך הכל צריכים להיות לפחות $3 + 1 + 1$ מצבים.

שאלה 3

א. זה יתכן. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 0$: $P_{i,0} = 0.1^{i+1} = 1 - P_{i,i+1}$. במקרה זה ההסתברות לחזור למצב 0 ב i צעדים היא לא גדולה מ 0.1^{i+1} וההסתברות לחזור אי פעם קטנה מ $\sum_{i=0}^{\infty} 0.1^{i+1} < 1$. לכן מצב 0 הוא חולף.
הערה
השימוש בלמה של בורל קנטלי אינו מתאים. ממצב מסוים יכולה להיות יותר מהזדמנות אחת לחזור למצב 0 . אם ממצב מסוים עוברים למצב 0 ישירות בהסתברות 1 אז מצב 0 יכול להיות נשנה גם אם סכום הטור של הסתברויות המעבר למצב 0 הוא סופי. ראו גם דוגמא בסעיף ב' למקרה שסכום הטור הוא סופי אך חוזרים בודאות למצב 0 .

ב. זה יתכן. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 2$: $P_{i,1} = 0.5 = P_{i,i+1}$ ומתקיים $P_{1,0} = 0.4 = 1 - P_{1,2}$. במקרה זה היכן שלא נמצאים יש הסתברות של לפחות $0.5 \cdot 0.4$ להגיע למצב 0 תוך שני צעדים. כך תוחלת מספר זוגות הצעדים וגם תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא סופית.

ג. זה יתכן. נניח שממצב 0 עוברים בהכרח למצב 1 , ממצב 1 עושים צעד שמאלה בסיכוי 0.4 וצעד ימינה בסיכוי 0.6 ומיתר המצבים הולכים בסיכוי שווה ימינה ושמאלה. כך ממצב 0 בודאות חוזרים למצב 1 ומכל מצב אחר בודאות חוזרים למצב 1 (כמו שבהילוך מקרי סימטרי בודאות

מגיעים לכל מצב). לכן מצב 1 הוא נשנה. אך כמו בהילוך מקרי סימטרי תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 1 היא אין סופית. לכן מצב 1 הוא נשנה אפס. כל המצבים מקושרים ולכן כולם נשנים אפס.

שאלה 4

א. זה יתכן. נניח שמתקיים $P(Z=2)=0.99=1-P(Z=0)$.
תוחלת מספר הצאצאים של פרט גדולה מ 1 . לכן סיכויי ההכחדות קטנים מ 1.
הפונקציה היוצרת של מספר הצאצאים היא $g(t)=0.01+0.99t^2$.
מתקיים $g(0)>0$. מתקיים $g(0.1)<0.1$. לכן סיכויי היכחדות הם בין 0 ל 0.1 .

ב. זה לא יתכן. אם התהליך נכחד בודאות אז החל מאיזשהו שלב אין בכלל פרטים. התהליך לא נכחד בודאות רק אם תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה ממש מ 1 , זאת אומרת שהיא גדולה מ 1 באיזשהו a קבוע חיובי. אם תהיה הכחדות אז תנאי הסעיף לא יתקיימו. אחרת גודל האוכלוסיה ישאף לאין סוף. במקרה זה לפי החוק החלש ההסתברות שממוצע מספר הלידות בדור מסוים תהיה קטנה מ $1+a/2$ תשאף לאפס. לכן אם בדור מסוים התנאי יחול אז בסיכוי קרוב ל 1 הוא לא יחול בדור הבא.

שאלה 5

א. תהליך מתאים הוא $Y(t)=X(\sqrt{t})$. מתקיים $Y(t^2)=X(\sqrt{t^2})=X(t)$.
הערה
כל רצף של משתנים מקריים הוא תהליך סטוכסטי בזמן רציף. התהליך $Y(t)$ שתואר אינו שרשרת מרקוב אבל הוא כן תהליך סטוכסטי.

ב. ההסתברות של מאורע זה היא אפס. נראה תחילה שההסתברות שבמצב מסוים נשהה פחות מאשר בכל מצב אחר היא אפס. מכיון שלגבי כל מצב ההסתברות היא אפס, אז ההסתברות שיהיה מצב כזה היא גם אפס (כאיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס).
במצב מסוים שוהים זמן חיובי כלשהו. עבור כל זמן חיובי כזה, לגבי כל מצב אחר יש הסתברות חיובית קבועה (גם אם קטנה) שנשהה בו פחות. לפי הלמה של בורל קנטלי יהיו בהסתברות 1 אין סוף מצבים אחרים שבהם נשהה פחות.
הערות
עבור מצב נתון, המאורעות שבמצבים שונים אחרים נשהה פחות מאשר בו הם תלויים. לכן אי אפשר להשתמש בלמה של בורל קנטלי תוך הסתמכות על כך שבכל מצב יש סיכוי של חצי לשהות פחות מאשר במצב נתון מסוים.
לסדרה אין סופית יתכן שאין מינימום למרות שיש גבול תחתון.

ג. מכיון שקצב התקדמות התהליך הוא קבוע אז בכל חלוקה תוחלת מספר הקפיצות שנראה היא שווה. אין חלוקה שבמסגרתה התוחלת גדולה יותר מאשר בחלוקה אחרת.

ד. "נפספס" ערך מסוים אם יתרחשו יותר מקפיצה אחת בקטע שבו לא נצפה.
בכל אינטרוול זמן סופי יש הסתברות חיובית שיתרחשו יותר מקפיצה אחת. כך בכל חלוקה סופית יש הסתברות חיובית "שנפספס" איזשהו מצב. אבל כאשר נשאיף את גדלי הקטעים שבהם לא נצפה בתהליך לאפס (סדרה של חלוקות סופיות שבהן אורכי הקטעים שואפים לאפס) אז ההסתברות "שנפספס" מצב תשאף לאפס (אם החלוקה היא לקטעים באורך h אז ההסתברות שבקטע מסוים יהיה יותר מאירוע אחד היא $o(h)$ ויש סדר גודל של $\frac{1}{h}$ קטעים). לכן לגבי כל חלוקה יש חלוקות אחרות שעדיפות עליה.

שלומי