פתרון לבחינה מ 04/10/19

שאלה 1

א. לא בהכרח.
נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי על הישר. נניח שמתקיים עבור כל $0 \le n < \infty$ ש $Y_n = X_{n+8}$. כך (X_{n-7}, Y_{n-7}) מגלה באמצעות Y_{n-7} את ערכו של X_{n+1} וכך תורם מידע נוסף על (X_{n+1}, Y_{n+1}) שלא קיים ב (X_n, Y_n).

ב. הטענה נכונה.
זו שרשרת מרקוב כי בהינתן ערכו של משתנה באחת הסדרות, ערכם של הקודמים וגם של המשתנים בסדרה השניה לא רלוונטים.
בשרשרת בלתי פריקה ובלתי מחזורית עבור כל זוג מצבים נתון קיים שלב שהחל ממנו ניתן בכל שלב לעבור מהאחד לשני. לכן בזוג הסדור של שרשרות עבור כל זוג נתון של מצבים קיים שלב שהחל ממנו ניתן בכל שלב לעבור מהמצב הראשון למצב השני (המכסימום בין השלבים בשתי השרשרות המקוריות).

ג. הטענה נכונה.
בנוסף לאמור בסעיף ב', יש בכל אחת מהסדרות המקוריות עבור כל מצב התחלתי הסתברות גבולית חיובית להיות בו. לכן גם בזוג הסדור של השרשרות יש הסתברות גבולית חיובית להיות במצב ההתחלתי.

ד. לא בהכרח.
נניח ששרשרת אחת היא של הילוך מקרי על הישר שמתחיל בנקודה 0. נניח שהשרשרת השניה היא בעלת שני מצבים 0 ו 1. 0 שהוא מצב סופג ו 1 שהוא מצב התחלתי שממנו יש הסתברויות חיוביות להישאר בו וגם לעבור ל 1.
אם בשלב 1 נמצאים במצב 0 זה אומר שהתהליך הראשון נמצא במצב מינוס 1 והתהליך השני נמצא במצב 1. מכאן הסכום יכול לעבור ישירות למצב 0. אם לעומת זאת בשלב 2 נמצאים במצב 0, זה אומר שהתהליך הראשון נמצא במצב 0 ושהתהליך השני כבר הגיע למצב הסופג 0. מכאן הסכום לא יכול לעבור ישירות למצב 0. לכן אין הומוגניות בזמן.

ה. לא בהכרח.
נניח שהתהליכים ב"ת ושכל אחד מהתהליכים הוא הילוך מקרי סימטרי, הראשון על השלמים, השני על הכפולות של $\sqrt{2}$ והשלישי על הכפולות של $\sqrt{3}$. כך כל אחד מהם הוא נשנה. הסכום יחזור למצב ההתחלתי רק אם כל אחד מהם יחזור למצב ההתחלתי. זה לא קורה אין סוף פעמים (הילוך מקרי תלת מימדי אינו נשנה).

שאלה 2

א. נתן דוגמא שתראה שזה אפשרי.
נניח שמתקיים עבור כל $0 \le i < \infty$: $P(Z = i)$=$\frac{1}{(i+1)(i+2)}$ (טור ההסתברויות הזה מסתכם ב 1). אז התוחלת של המשתנה היא אין סוף וההסתברות שתהיה היכחדות כבר בדור הראשון היא חצי ויתכן שתהיה היכחדות רק בהמשך.

ב. קיימת סדרה מתאימה.
נניח שמתקיים $P(Z = 0) = a_k = 1 - P(Z = 1)$. עבור כל פרמטר a_k חיובי התוחלת קטנה מ 1 ולכן כל תהליך נכחד בודאות. אם נשאיף את a_k ל 0, אז ההסתברות ששני התהליכים יכחדו באותו דור תשאף ל 0 וכך כל אחד משני התהליכים הסימטריים יכחד לפני האחר בסיכוי שישאף לחצי.

שאלה 3

א. הוא בודאות יתקבל באיזשהו שלב עבור כל פרמטר.
אם כאשר השירות של הראשון יסתיים השלישי עדיין לא יגיע אז השני יתקבל לשרות כי לא יהיה אף מעמד אלטרנטיבי לקבלה. אחרת בכל זמן סיום שרות שבו השני עדיין לא התקבל ושבו יהיה בתחנה יותר מלקוח אחד, יהיה לו סיכוי חצי להתקבל. וכך המאורע שהוא אף פעם לא יתקבל הוא בעל הסתברות אפס.

ב. הוא יתקבל לשירות בודאות רק עבור $\lambda \leq 1$.
עבור פרמטר שלא גדול מ 1, מצב 0 הוא נשנה ולכן בהסתברות 1 כל לקוח יקבל שירות באיזשהו שלב.
עבור פרמטרים גדולים מ 1 כל המצבים חולפים. בהסתברות חיובית אם ברגע שהשירות של הראשון יסתיים יהיו בתחנה לפחות שני לקוחות, וגם לא נחזור יותר למצב 0 אז השני לעולם לא יתקבל לשירות.

ג. הוא יתקבל לשירות בודאות רק עבור $\lambda \leq 1$.
עבור פרמטר לא גדול מ 1 התחנה בודאות תתרוקן אין סוף פעמים. עבור פרמטר גדול מ 1, קיימת אפשרות שהוא יגיע לתחנה זמן ארוך מספיק אחרי הראשון כך שקצב המגיעים תוך זמן הקצר מזה לאחר קודמיהם יהיה גדול מ 1. כך אפילו מספרם של אלה ישאף לאינסוף. הוא לא יתקבל לשירות לפני אף אחד מהם ולכן הוא עלול לא להיות משורת.

ד. הוא יתקבל לשירות בודאות רק עבור $\lambda \leq 1$.
כאמור עבור פרמטר לא גדול מ 1 התחנה תתרוקן אין סוף פעמים בהסתברות 1.
עבור פרמטר גדול מ 1 יתכן למשל שהוא יגיע לתחנה לאחר זמן 16 ובזמן זה הראשון עדיין ישורת, וכך כל מי שימתין בתחנה תמיד יקבל עדיפות על פניו. מספר הלקוחות שבתחנה ישאף לאין סוף והוא עלול לא להיות משורת.

ה. החוק החזק חל על הסדרה.
הזמנים בין הגעת לקוח להגעת הלקוח הבא מתפלגים מעריכית. הזמנים האלה הם ב"ת. למשתנה מעריכי יש פונקצית הסתברות מצטברת חיובית בכל נקודה חיובית. סדרת ערכי המינימום שלהם שואפת לאפס בהסתברות 1. סדרת התוחלות וגם סדרת הממוצעים של ערכי המינימום שואפת לאפס בהסתברות 1.
<u>הערה</u>
ראינו שלמרות שסדרת ערכי המינימום אינה סדרת משתנים ב"ת החוק החזק חל עליה.

שלומי