

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.

בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.

כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.

הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.

נמקו את תשובותיכם!

אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (18 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי שמתפלג Z , כאשר מתקיים

$$P(Z = 0) = \frac{1}{3} = 1 - P(Z = 2)$$

א. האם מתקיים $P(X_{n+1} = 0) \geq P(X_n = 0)$ לכל $n \geq 1$?

האם מתקיים $P(X_{n+1} = 0) \leq P(X_n = 0)$ לכל $n \geq 1$?

ב. האם מתקיים $P(X_{n+1} = 8) \geq P(X_n = 8)$ לכל $n \geq 1$?

האם מתקיים $P(X_{n+1} = 8) \leq P(X_n = 8)$ לכל $n \geq 1$?

שאלה 2 (18 נקודות)

א. האם קיימת שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש X_2 ו X_4 הם שווי התפלגות, אך X_2

ו X_3 אינם שווי התפלגות? אם קיימת שרשרת כזאת, אז הביאו דוגמא מפורשת לשרשרת כזאת.

ב. האם קיימת שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש X_3 ו X_4 הם שווי התפלגות, אך X_2

ו X_3 אינם שווי התפלגות? אם קיימת שרשרת כזאת, אז הביאו דוגמא מפורשת לשרשרת כזאת.

שאלה 3 (36 נקודות)

תהי $\{X(t)\}$ שרשרת מרקוב בזמן רציף, שמרחב מצביה הוא השלמים האי שליליים. נניח שאם נמצאים במצב 0 אז שוהים בו זמן המתפלג $exp(1)$ ואז עוברים למצב 1. נניח שעבור כל מצב i טבעי, אם נמצאים בו אז שוהים בו זמן המתפלג $exp(1)$ ואז עוברים בסיכוי שווה למצב $i - 1$ או למצב $i + 1$.

- א.** נניח ש $X(0) = 1$. מהי ההסתברות שנגיע למצב 3 לפני שנגיע למצב 0 ?
ב. נניח ש $X(0) = 1$. מהי תוחלת זמן ההגעה הראשונה למצב 2 ?
ג. נניח ש $X(0) = 2$. מהי תוחלת זמן ההגעה הראשונה למצב 1 ?
ד. נניח ש $X(0) = 0$. מהו בקירוב או בדיוק $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) > 100)$?
האם תשובתך היא מקורבת או מדויקת ?

שאלה 4 (36 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

- א.** תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה שהמצב 1 הוא אחד ממצביה. נניח שעבור התפלגות התחלתית מסוימת על מצביה קיימת הסתברות גבולית $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$, אז בהכרח עבור כל התפלגות התחלתית על מצבי השרשרת קיימת הסתברות גבולית $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$.
ב. תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה. נניח שעבור התפלגות התחלתית מסוימת על מצבי השרשרת קיימת תוחלת זמן חזרה סופית למצב ההתחלתי, אז בהכרח עבור כל התפלגות התחלתית על מצבי השרשרת קיימת תוחלת זמן חזרה סופית למצב ההתחלתי.
ג. תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה ולא מחזורית. בהכרח קיים n סופי כך שעבור כל זוג מצבים i, j מתקיים $P_{i,j}^{(n)} > 0$.
ד. תהי $\{X(t)\}$ שרשרת מרקוב בזמן רציף שהיא בלתי פריקה. בהכרח קיים t סופי כך שעבור כל זוג מצבים i, j מתקיים $P_{i,j}(t) > 0$.