

פתרון לבחינה מ 17/09/18

שאלה 1

א. מטריצת המעבר היא

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

זו מטריצה דו סטוכסטית ולכן הוקטור האחיד הוא וקטור סטציונרי. זו שרשרת בלתי פריקה, ולכן יש וקטור סטציונרי יחיד. ניתן להשאיר במצבים שני צעדים רצופים ולכן השרשרת לא מחזורית. הודות לאי מחזוריות, קיימות הסתברויות גבוליות שוות לסטציונריות. לכן ההסתברות הגבולית שווה לשליש.

ב. נתקבל שארית של 2 בדיוק בפעם הראשונה שקוביה תראה תוצאה של 2. התפלגות מספר ההטלות עד קבלת תוצאה של 2 היא $G\left(\frac{1}{6}\right)$ שלה יש תוחלת של 6.

הערה

כאשר מתחילים במצב מסוים, אז תוחלת מספר הצעדים עד חזרה אליו שווה לאחד חלקי ההסתברות הסטציונרית שלו. אבל, כאן מתחילים במצב אחר מזה שאליו צריך להגיע. כן.

$$\text{עבור כל מצב } i \text{ מתקיים } P_{i,i+2} = \frac{1}{6}, P_{i,i+3} = \frac{5}{6}.$$

ג. נסתכל על שרשרת מרקוב שמצביה הם המספר הראשון שבו ביקרנו בשלישייה של מספרים עוקבים. למשל אם אם בקרנו ב 102 ולא בקרנו ב 100 ולא בקרנו ב 101, אז בשלישייה שמתחילה ב 100 אנו במצב 3 ובשלישייה שמתחילה ב 101 אנו במצב 2. מטריצת המעבר של השרשרת הזאת היא

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לשרשרת בלתי פריקה זו יש וקטור סטציונרי יחיד $\left(\frac{6}{17}, \frac{6}{17}, \frac{5}{17}\right)$. ניתן לחזור למצב 1 בשני צעדים וגם בשלושה צעדים. לכן הוא לא מחזורי. מכיון שאי מחזוריות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים לא מחזוריים. לכן לכל מצב יש הסתברות גבולית ששווה להסתברות הסטציונרית שלו. מכיון שהשלישייה שמתחילה ב 1000 היא רחוקה מההתחלה, אז ההסתברות שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב השני שהיא $\frac{6}{17}$.

הערה

ה. בנתוני שאלה זו ניתן למעשה לבקר בכלל היותר אחד מבין שני הטבעיים 1000 ו 1001. השלישייה שמתחילה ב 1000 היא רחוקה מההתחלה. השלישייה שמתחילה ב 2000 היא רחוקה מהשלישייה שמתחילה ב 1000. לכן כמעט שאין תלות בין מה שקורה בשלישיות אלה. ההסתברות המבוקשת שווה בקירוב למכפלת ההסתברויות של שני מאורעות שהיא $\frac{6}{17} \cdot \frac{6}{17}$.

שאלה 2

- א. יתכן שקיים גבול של אפס. למצב נשנה אפס יש תמיד הסתברות גבולית של אפס. הילוך מקרי סימטרי על הישר הוא נשנה אפס. בזמנים אי זוגיים כלל לא ניתן לחזור למצב ההתלחתי. בזמנים זוגיים ניתן לחזור, אבל ההסתברות הגבולית בזמנים זוגיים היא גם שווה לאפס.
- ב. לא יתכן שקיימים שלושה גבולות חלקיים. אם המצבים לא מקושרים, אז כלל לא ניתן להגיע ממצב אחד לאחר, ואז יש הסתברות גבולית יחידה של אפס. אם שני המצבים הם באותה מחלקה, אז בזמנים שבהם לא ניתן לעבור מהאחד לאחר יש גבול יחיד של אפס. בזמנים שבהם ניתן לעבור מהאחד לאחר יש גבול יחיד ששווה להסתברות הסטציונרית של j כפול אורך המחזור שלו.
- ג. נתן דוגמא של שרשרת בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ שבה יש שלושה גבולות חלקיים לסדרה $\{P_{1,2}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. מטריצת המעבר תהיה

0.0	0.2	0.3	0.5
0.0	0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0
0.0	1.0	0.0	0.0

עבור כל ערך n טבעי מתקיים

$$P_{1,2}^{(3n)} = 0.3, P_{1,2}^{(3n+2)} = 0.5, P_{1,2}^{(3n+1)} = 0.2$$

שאלה 3

- א. נעשה רדוקציה לתהליך הסתעפות. כל דור יורכב מהצאצאים של הדור הקודם. בדור ההתחלתי יש שני פרטים. השושלת תכחד בודאות אם"ם תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט תהיה לא גדולה מ-1. לכן התנאי הוא $p \leq 0.5$.
- הערה
- כל משתנה מקרי מעריכי מקבל ערך סופי בהסתברות 1.
- ב. אותו תנאי תקף לכל התפלגות של אורך החיים של הפרטים. בסופו של דבר כל דור יעלם, וחשוב רק מהי התפלגות מספר הצאצאים שבני הדור משאירים.

שאלה 4

- א. בקפיצה הרביעית נמצאים בהכרח במצב 1. דרוש שיחידת זמן אחת אחר כך נהיה במצב 1. לכן מבוקש $P_{1,1}(1)$.
- מתקיים $P_{1,1}'(t) = -P_{1,1}(t) + (1 - P_{1,1}(t))$ או $P_{1,1}'(t) = -2P_{1,1}(t) + 1$ למשוואה זו יש קבוצת פתרונות $P_{1,1}(t) = ce^{-2t} + 0.5$. בצירוף תנאי ההתחלה $P_{1,1}(0) = 1$ נקבל $P_{1,1}(t) = 0.5e^{-2t} + 0.5$ ו $P_{1,1}(1) = 0.5e^{-2} + 0.5$.
- ב. השווייון לא נכון.
- אם הקפיצה הרביעית ארעה יותר מיחידת זמן אחת אחרי השלישית, אז דרוש שביחידת זמן אחת החל מהקפיצה הרביעית נעבור ממצב 1 למצב 1 שזה $P_{1,1}(1)$. אבל אם הקפיצה הרביעית ארעה לפני שעברה יחידת זמן מהקפיצה השלישית, אז ידוע שבזמן שלאחר הקפיצה הרביעית היינו במצב 1. במקרה זה בזמן קצר יותר צריך לעבור ממצב 1 למצב 1. הביטוי $0.5e^{-2t} + 0.5$ הוא מונוטוני יורד, ולכן במקרה זה הסיכוי להיות במצב 1 יחידת זמן לאחר הקפיצה הרביעית איננו שווה ל $P_{1,1}(1)$. לכן השקלול בין שני המקרים לא נותן $P_{1,1}(1)$.
- הערה
- למעשה כאן אנו יודעים שהקפיצה הרביעית ארעה פחות מיחידת זמן אחת לאחר הקפיצה השלישית. הסיבה לכך היא שבקפיצה השלישית אנו בהכרח במצב 2 ועד הקפיצה הרביעית בודאות נהיה במצב 2. הסיכוי שהוא המרכיב השני בשקלול שעליו דברנו אינו שווה ל $P_{1,1}(1)$.