

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- א. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.
מצאו מערכת משוואות לחישוב תוחלת מספר הצעדים עד שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה. אין צורך לפתור את המערכת.
- ב. מצאו $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,4}^{(n)}$. כאן יש לתת תשובה סופית.
- ג. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.
מצאו את התפלגות X_1 ואת התפלגות X_2 .
- ד. כמה התפלגויות אפשריות שונות של X_0 קיימות, כך שכל X_n , $0 \leq n < \infty$, הם שווי התפלגות ?

שאלה 2 (36 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

- א.** לא קיימת שרשרת מרקוב שבה אין סוף מצבים נשנים חיובית, וגם אין סוף מצבים נשנים אפס, וגם אין סוף מצבים חולפים.
 - ב.** לא קיימת שרשרת מרקוב שבה כל המצבים חולפים, שבה עבור כל מצב התחלתי, בהינתן שנחזור אליו באיזשהו שלב, תוחלת מספר הצעדים עד חזרה היא סופית.
 - ג.** לא קיימת שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית אפס, שבה קיימים אין סוף מצבים התחלתיים אפשריים, כך שתוחלת מספר הצעדים להגעה מהם למצב 0 היא סופית.
 - ד.** לא קיימת שרשרת מרקוב בת מרחב מצבים של כל השלמים, שבה עבור כל מצב התחלתי אפשרי $i \neq 0$, ההסתברות להגיע אי פעם למצב 0 היא 0.5.
-

שאלה 3 (36 נקודות)

בתחנת שרות יש שרת אחד שיכול בכל זמן לתת שרות ללקוח אחד לכל היותר. משך שרות מתפלג מעריכית עם תוחלת של שעה אחת. ברגע הזמן 0 נפתחת התחנה ומרגע זה יכולים להגיע לקוחות. מופע הלקוחות לתור הוא פואסוני בעוצמה של λ לשעה. בתחנה יש אין סוף מקומות המתנה. כל לקוח המגיע לתחנה כאשר יש לקוח בשרות, מצטרף לתור הממתינים לשרות. יהי $X(t)$ מספר הלקוחות שבתחנה בזמן t .

- א.** מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך $X(t)$.
 - ב.** נניח את ההנחה המקובלת, שבכל פעם שהשרת מסיים שרות, הוא מקבל את הלקוח שממתין הכי הרבה זמן ברגע זה. מהם ערכי λ שעבורם מספר הלקוחות שבתחנה ישאף לאין סוף?
 - ג.** מהם ערכי λ שעבורם כל לקוח שיגיע לתחנה יתקבל לשרות באיזשהו שלב? כעת נניח הנחה לא מקובלת, שבכל פעם שהשרת מסיים שרות, הוא מקבל את הלקוח שהגיע אחרון לתחנה מבין הלקוחות הממתינים באותו רגע. מהם ערכי λ שעבורם מספר הלקוחות שבתחנה ישאף לאין סוף?
 - ד.** נניח ש $\lambda = 2$, מהו $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(2t) - X(t) \geq 1.5t)$?
-