

מועד א' סמסטר ב' תשע"ד
14/07/14

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (45 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי סימטרי על כל השלמים (חיוביים, אפס ושיליים) עם מצב התחלתי 6.
יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש Z מתפלג.
כאשר $P(Z=0)=0.7$, $P(Z=2)=0.2$, $P(Z=3)=0.1$.

- א. מהי תוחלת מספר הצעדים עד שההילוך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב 7 ?
- ב. מהי תוחלת מספר הצעדים עד שההילוך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב 4 או למצב 7 ?
- ג. מהי ההסתברות שההילוך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב 7 לפני שהוא יגיע למצב 4 ?
- ד. מהי ההסתברות שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע להכחדות אם נתון ש $(Y_0=1)$?
- ה. נניח ש Y_0 מתפלג כפי שמתפלג מספר הצעדים שלוקח לתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ להגיע למצב 7.
מהי כעת ההסתברות שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע להכחדות ?
-

שאלה 2 (27 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת לפחות שלושה מצבים ומצב התחלתי שנקרא לו 0. נסתכל על סדרות של מאורעות $\{A_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ עבור כל מצב i :
המאורע $A_{i,n}$ הוא המאורע שעבור כל $j \neq i$ מספר הביקורים המצטבר עד שלב n במצב i לא יהיה קטן ביותר מ-1 ממספר הביקורים המצטבר עד שלב n במצב j .
נסתכל גם על סדרות של מאורעות $\{B_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ עבור כל מצב i :
המאורע $B_{i,n}$ הוא המאורע שעבור כל $j \neq i$ מספר הביקורים המצטבר עד שלב n במצב i יהיה גדול ביותר מ-2 ממספר הביקורים המצטבר עד שלב n במצב j .
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות:

- א. לא יתכן שיתקיים $P(A_{i,n})=1$ עבור כל מצב i ועבור כל שלב n .
ב. לא יתכן שעבור כל מצב $i \neq 0$ ועבור כל שלב n יתקיים $P(A_{i,n})=1$, אך גם יתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{0,n})=0$.
ג. לא יתכן שיתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)}=0$, אך $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_{0,n})=1$.
-

שאלה 3 (36 נקודות)

בתחנת שרות יש שרת אחד שיכול בכל זמן לתת שרות ללקוח אחד לכל היותר. משך שרות מתפלג מעריכית עם תוחלת של שעה אחת. ברגע הזמן 0 נפתחת התחנה ומרגע זה יכולים להגיע לקוחות. מופע הלקוחות לתור הוא פואסוני בעוצמה של 1 לשעה. בתחנה יש מקום המתנה יחיד. לקוח המגיע לתחנה כאשר יש לקוח אחד בשרות ואין ממתנים, ממתין במקום ההמתנה עד שיתקבל לשרות עם תום הטפול בלקוח המשורת. לקוח המגיע כאשר יש כבר ממתין אחר, נדחה ולא מצטרף לתור הממתנים לשרות.
יהי $X(t)$ מספר הלקוחות שבתחנה בזמן t .
יהי t_1 רגע הזמן בו לראשונה נדחה לקוח שהגיע לתחנה.

- א. מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך $X(t)$.
מצאו גם את מטריצת המעבר בזמני הקפיצות של התהליך $X(t)$.
ב. מהי השכיחות הגבולית של הקפיצות שבהן יש בדיוק לקוח אחד בתחנה?
האם קיימת הסתברות גבולית להימצאות של לקוח אחד בתחנה בזמני הקפיצות?
ג. מהו $E(t_1)$?
ד. מהו $P(X(t_1+1)=1)$, זאת אומרת, מהי ההסתברות ששעה אחת לאחר רגע הדחיה הראשונה, יהיה בתחנה לקוח אחד בדיוק?
-