

## פתרון מקוצר לבחינה מ 23/09/12

### שאלה 1

א. כן קיים

הסתכלו על המצב השני בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

ב. לא קיים

מצב נשנה אפס נמצא במחלקה אינסופית. לכן יש מסלולים אליו ממצבים אחרים ( יתכן רק שההסתברויות הגבוליות הן 0 ).

ג. כן יתכן

שרשרת על השלמים האי שליליים. מתקיים  $P_{0,0} = 1$ , לכל  $i > 1$  מתקיים  $P_{i,i+1} = 1$ , עבור

$i = 1$  מתקיים  $P_{1,0} = 0.5 = P_{1,2}$ . ממצב 1 מגיעים למצב 0 בהסתברות 0.5.

דוגמא נוספת תוכלו לראות בסעיף א' בשאלה 2.

ד. כן יתכן

שרשרת על הטבעיים. עבור כל  $i \geq 1$  מתקיים  $P_{i,i} = 1 - \frac{1}{i} = P_{i,i+1}$ . כל המצבים הם לא ארגודים

ולכן הם חולפים. אך עבור כל  $\varepsilon > 0$  קיים  $i > \frac{1}{\varepsilon}$ , כך שההסתברות לחזור אליו מיד לאחר צעד

אחד גדולה מ  $1 - \varepsilon$ .

ה. כן קיימת

ראו שרשרת

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

מתקיים  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$  ומתקיים  $P_{1,3} \neq P_{3,1}$  ולכן  $\pi_1 P_{1,3} \neq \pi_3 P_{3,1}$ .

### שאלה 2

א. תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1. לכן ההסתברות להכחדות קטנה מ 1. מבוקש

הפתרון החיובי הקטן ביותר של המשוואה  $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$ . פתרון זה הוא  $\frac{1}{2}$ .

ב.  $\frac{1}{2}$  שזה כמו הסכוי שלא תהיה הכחדות.

אם תהיה הכחדות, אז החל מרגע ההכחדות, יתקיים  $(X_{n+1} = X_n)$ . אם לא תהיה הכחדות, אז גודל האוכלוסיה ישאף לאינסוף ( כי כל מצב  $i \neq 0$  הוא לא ארגודי ולכן חולף ). כאשר גודל האוכלוסיה ישאף לאינסוף, אז ההסתברות שממוצע מספר הצאצאים של כל הפרטים בדור מסוים יהיה קטן

מקבוע שקטן מ  $\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0$  ( שהיא תוחלת מספר הצאצאים של פרט ) ישאף לאפס.

$$P(X_1 = 0) \cdot 0 + P(X_1 = 2) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

ג.

### שאלה 3

א. 0

לתחנה מגיעים צרכנים בקצב קבוע בעל עצמה 3. באף נקודת זמן, לא ניתן שרות בקצב הגדול מ 2. לכן מספר הצרכנים שבמערכת שואף לאינסוף.

ב. כן

נתאר יוצר אינפיניטימלי:

$$\lambda_{0,0} = -3, \lambda_{0,1} = 3$$

$$\text{עבור } i \geq 1: \lambda_{i,i-1} = 1 + (i-1) \cdot 1, \lambda_{i,i+1} = 3, \lambda_{i,i} = -(1 + (i-1) \cdot 1 + 3)$$

( בכל מצב, קצב העזיבה של המערכת הוא סכום של קצבי העזיבה של מי שמשורת ושל אלה שממתנים בתור שגם יכולים לעזוב ).

ג. לא

מתקיים  $Y(0) = 0$ . כדי שבנקודת זמן  $h$  יתקיים  $Y(h) \neq 0$  צריך שיהיו יותר מקפיצה אחת במערכת כולה. לכך יש הסתברות שהיא  $o(h)$ . לכן זמן השהות במצב 0 בזמן 0 אינו בעל התפלגות מעריכית.

ד. לא

אם אנו במצב 2 והגענו אליו ממצב 1 לאחר שאף פעם לא היינו במצב  $i \geq 2$ , אז מרגע ההגעה למצב 2 יש שרת אחד בפעולה ובאותו רגע עצמת המעבר למצב 1 הוא בעל עצמה 1. אם לעומת זאת הגענו למצב 1 ממצב 3, אז יתכן ששני הלקוחות משורתיים ( במקרה זה עצמת המעבר למצב 1 היא 2 ). לכן במקרה זה בזמן זה ממוצע קצב המעבר למצב 1 הוא גדול מ 1. לכן קצב המעבר תלוי בהסטוריה.

שלומי