

מועד א' סמסטר ב' תשע"ב  
23/07/12

### בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.

בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.

כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.

הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .

נמקו את תשובותיכם!

אנא השאירו את העמוד הראשון ( צד אחד של דף ) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

---

#### שאלה 1 ( 45 נקודות )

שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב הומוגניות שמרחב המצבים שלהן הוא כל השלמים ( חיובים, שליליים ואפס ).

נניח שמתקיים עבור כל  $-\infty < i < +\infty$  :  $P_{i,i+1} = 1 - P_{i,i-1}$ .

נניח גם שמתקיים  $\lim_{i \rightarrow +\infty} P_{i,i+1} = 0.5$ .

בכל אחד מהסעיפים הבאים מותר להסתמך על כל תוצאה שהוכחה בכיתה.

א. האם יתכן שכל מצבי השרשרת הם נשנים אפס?

ב. האם יתכן שבשרשרת יש מצב נשנה יחיד?

ג. האם יתכן שיש גם מצבים נשנים חיובית וגם מצבים נשנים אפס וגם מצבים חולפים?

ד. כמה, לכל היותר, מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים אפס יכולות להיות?

ה. האם יתכן שכל המצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים חולפים?

---

**שאלה 2** (27 נקודות)

שאלה זו עוסקת בהילוך מקרי על לוח 2 על 2.

1	2
4	3

בכל שלב נמצאים באחת מארבע המשבצות, ובשלב הבא עוברים, בסכוי שווה, לאחת משתי המשבצות שאיתה יש למשבצת צלע משותפת. כך למשל ממצב 1 עוברים בסכוי שווה למצבים 2 או 4.

- א.** מהו המחזור של מצבי השרשרת?  
האם קיים וקטור סטציונרי יחיד?
- ב.** האם קיים וקטור הסתברויות שחל עליו תנאי האיזון המפורט?
- ג.** מהו  $P_{1,3}^{(7)}$ ? מהו  $P_{1,3}^{(8)}$ ?

**שאלה 3** (36 נקודות)

בכל אחד מהסעיפים הבאים עליכם לענות ולנמק אם קיימת שרשרת מרקוב בזמן רציף העונה על התנאים המתוארים. בפתרון השאלה אין לעשות שימוש בפתרון משוואות דיפרנציאליות.

**א.** יש שני מצבים וקיים זמן  $t$  שבו מטריצת המעבר  $P(t)$  מקיימת

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**ב.** יש שני מצבים וקיים זמן  $t$  שבו מטריצת המעבר  $P(t)$  מקיימת

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

**ג.** יש שלושה מצבים וקיים זמן  $t$  שבו מטריצת המעבר  $P(t)$  מקיימת

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

**ד.** יש ארבעה מצבים, יש מספר ממשי חיובי שמופיע תשע פעמים במטריצת היוצר האינפיניטסימלי וקיים זמן  $t$  כך שבמטריצת המעבר  $P(t)$  כל האיברים הם שונים.