

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את הדף הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (45 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב הומוגניות $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שמרחב המצבים שלהן הוא קבוצה סופית או בת מניה מתוך הממשיים החיוביים. נניח ש $(X_0 = 1)$.
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $E(X_n) = 2$ לכל $n \geq 1$ אז השרשרת אינה מחזורית.
- ב. אם קבוצת המצבים של השרשרת היא קבוצת הטבעיים ומתקיים לכל $n \geq 1$:
 $E(X_n) < 8$ אז קיים לפחות מצב נשנה אחד.
- ג. אם מתקיים עבור כל $n \geq 0$: $E(X_{n+1}) > E(X_n)$ אז מצב 1 הוא מצב חולף.
- ד. אם מתקיים עבור כל $a \geq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > a) = 1$ אז כל המצבים הם חולפים.
- ה. אם מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 0$ אז השרשרת אינה בלתי פריקה.

שאלה 2 (27 נקודות)

נתון תהליך הסתעפות $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שבו התפלגות מספר הצאצאים של פרט מקיימת:

$$P(Z = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(Z = 2) = \frac{2}{3}$$

- א. מצאו את ההסתברות להכחדות בהינתן $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0.5$.
- ב. מצאו את ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_2 = 4, X_3 = 6)$.
- ג. מצאו $P(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 = 0 | X_0 = 1)$.

שאלה 3 (36 נקודות)

בסניף בנק יש שלושה כספרים. כל אחד מהם יכול בכל נקודת זמן לתת שרות לכל היותר ללקוח אחד. משך שרות מתפלג $\exp(1)$. כל לקוח שמגיע לסניף פונה לאחד הכספרים. אם כספר זה עסוק באותו זמן אז הוא מצטרף לתור הממתנים לשרות אצל כספר זה (לכל כספר יש תור ממתנים נפרד שאינו מוגבל באורכו). נניח שבזמן 0 אין בסניף לקוחות. זרם הלקוחות המגיעים לסניף הוא פואסוני בעצמה 3.

יהי $X(t)$ מספר הלקוחות שנמצאים בזמן t בשירות או בהמתנה בתור של עידו שהוא אחד הכספרים.

בסעיפים א', ב' וג' נניח שכל לקוח המגיע לסניף בוחר באקראי בסכוי שווה את הכספר שאליו הוא פונה.

- א.** מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך $X(t)$.
 - ב.** מצאו את $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0)$.
 - ג.** האם אינסוף לקוחות ימצאו עם הגיעם לסניף, בדיוק כספר אחד פנוי?
האם אינסוף לקוחות ימצאו עם הגיעם לסניף, בדיוק שני כספרים פנויים?
האם אינסוף לקוחות ימצאו עם הגיעם לסניף, בדיוק שלושה כספרים פנויים?
 - ד.** בסעיף זה נניח שכל לקוח המגיע לסניף פונה באקראי, בסכוי שווה, לכספר מבין הכספרים שאצלם נמצאים באותו זמן מספר מכסימלי של לקוחות (אם יש רק אחד כזה אז הוא בהכרח פונה אליו).
מצאו את $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0)$.
-