

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בבחינה זו יש 4 שאלות. ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
בראש כל שאלה רשום הניקוד שלה. בכל שאלה, יש לכלל הסעיפים אותו משקל.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה!

שאלה 1 (35 נקודות)

נתון תהליך מרקוב בזמן רציף בעל מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ויוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- א. מיינו את מצבי השרשרת (למצבים חולפים ונשנים ולמחלקות קשירות של נשנים).
ב. מצאו את מטריצת המעבר בזמני הקפיצות.
ג. תנו שתי הצגות שונות של התהליך באמצעות שיעון פואסוני וטור של מטריצות.
ד. מצאו $P_{4,4}(t)$ עבור כל t סופי.
ה. מצאו את תוחלת זמן ההגעה הראשונה למצב 1 כאשר מתחילים במצב 4.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתון תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים מקיימת $P(Z=0) = \frac{1}{3}$, $P(Z=2) = \frac{2}{3}$.

נניח ש $(X_0 = 1)$.

מהי ההסתברות להכחדות?

מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 5)$?

שאלה 3 (24 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב הומוגנית שמרחב מצביה הוא השלמים האי שליליים.

נניח שמתקיים $P_{0,1} = 1$ ועבור כל $i \geq 1$: $P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = 0.5$.

א. מצאו את תוחלת זמן ההגעה הראשונה ממצב 0 למצב 2.

ב. מצאו את תוחלת זמן ההגעה הראשונה ממצב 3 למצב 2.

שאלה 4 (35 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ שרשרת מרקוב הומוגנית עם מצב התחלתי מסוים.

יהי $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ תהליך סטוכסטי שמונה את מספר המצבים השונים שבהם $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ מבקר החל מכך שמתחילים במצב התחלתי מסוים זה.

כך למשל, תמיד $Y_0 = 1$, כי כבר בשלב 0 מבקרים באיזשהו מצב שהוא המצב ההתחלתי וכך למשל אם אין מעבר ישיר מהמצב ההתחלתי לעצמו אז בהכרח $Y_1 = 2$, כי במקרה זה בשלב 1 בהכרח מגיעים למצב שבו עדיין לא ביקרנו קודם.

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

א. לא קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ עם מצב התחלתי מסוים כך ש $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית.

ב. לא קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ עם מצב התחלתי מסוים כך ש $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ אינו מרקובי.

ג. לא קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ עם מצב התחלתי מסוים כך ש $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ הוא תהליך מרקוב לא הומוגני.

ד. לא קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ כך שקיימים בה מצבים התחלתיים שעבורם $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית וקיימים מצבים התחלתיים שעבורם $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ אינו מרקובי.

ה. לא קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ עם מצב התחלתי מסוים כך ש $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית שבה קיימים מצבים נשנים אפס.