

### בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.  
ענו על כל השאלות. סך כל הנקודות הוא 110. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
נמקו את תשובותיכם.

בהצלחה!

#### שאלה 1 (28 נקודות)

נתונה מטריצת מעבר של שרשרת בעלת מרחב המצבים  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

	1	2	3	4	5
1	0.5	0.5	0	0	0
2	0.5	0	0.3	0.2	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0.5	0.5

א. מיינו את מצבי השרשרת. (6)

ב. עבור כל זוג מצבים  $(i, j)$  חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^{(n)}$ . (10)

ג. עבור כל מצב חולף, מצאו את תוחלת זמן ההקלטות בקבוצה של מצבים נשנים. (6)

ד. בהינתן שמתחילים במצב 2, מצאו את התפלגות מספר המצבים השונים שבהם מבקרים בהמשך לפחות פעם אחת. (6)

#### שאלה 2 (23 נקודות)

תהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים  $-\infty < i < +\infty$ . מתקיים:  $X_0 = 0$  ולכל  $n \geq 0$ ,  $X_{n+1} = X_n + b_n$ , כאשר  $b_n$  הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי  $\frac{1}{3}$  עושים שני צעדים

ימינה ובסכוי  $\frac{2}{3}$  עושים צעד אחד שמאלה.

א. מהו המחזור של מצבי השרשרת? (5)

ב. הוכיחו שכל המצבים הם נשנים. (12)

(רמז: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .)

ג. האם מצבי השרשרת הם נשנים חיובית או שהם נשנים אפס? (6)

**שאלה 3 (27 נקודות)**

תהי  $X_1, X_2, X_3, \dots$  סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{יהי} \quad \text{לכל } i \geq 1 \quad P(X_i = 0) = \frac{2}{3}, \quad P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$$

נסתכל על הסדרה  $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$  שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים  $X_1, X_2, X_3, \dots$ .

(1) א. הראו שכל מספר רציונלי בקטע  $[0,1]$  יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה  $\frac{S_n}{n}$  עבור איזשהו  $n$  טבעי.

(2) ב. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע  $[0,1]$ , אז לגבי כל מספר רציונלי  $\frac{p_2}{q_2}$  שעבורו  $0 < p_2 < q_2$ , יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

(6) ג. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ  $\frac{1}{3}$  לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

(6) ד. הראו שהמנה  $\frac{1}{3}$  תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1.

(רמז: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 2 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.)

(6) ה. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים

אילו הסדרה  $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$  היתה שרשרת מרקוב.

(6) ו. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה  $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$  אינה שרשרת מרקוב.

**שאלה 4 (32 נקודות)**

החל מזמן אפס, מגיעים לקוחות לתחנת שרות בורם פואסוני בעל עצמה ממוצעת  $\lambda = 1$  ליחידת זמן. בתחנה יש שרת אחד היכול לשרת ברגע נתון לכל היותר לקוח אחד. בתחנה יש אינסוף מקומות המתנה. לקוח המגיע כאשר השרת עסוק מצטרף לתור הממתנים.  $\mu(t)$  הוא משתנה מקרי המקבל ערכים טבעיים. עבור כל  $k$  טבעי, כאשר  $\mu(t) = k$  אז שרות של לקוח מסתיים בפרק זמן באורך  $h$  בהסתברות  $kh + o(h)$ . ברגע נתון  $t$ ,  $\mu(t)$  שווה למספר המכסימלי של לקוחות שהיו בו זמנית בתחנה עד זמן  $t$ . שימו לב ש  $\mu(t)$  לעולם אינו יורד, שהשרת יכול להעשות זריז יותר בממוצע, שכל שרות שניתן בפרק הזמן בין הרגע הראשון שהיו בו זמנית בתחנה  $n$  לקוחות לרגע הראשון שהיו בה בו זמנית  $n+1$  לקוחות ניתן בקצב  $n$ , ושקצבי השרות יכולים להשתנות במהלך שרות של לקוח. יהי  $X(t)$  - מספר הלקוחות שבתחנה בזמן  $t$ .

(9) א. האם אוסף המשתנים המקריים  $X(t)$  הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?

אם כן, אז מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של שרשרת זו. אם לא, אז נמקו זאת.

(9) ב. האם אוסף המשתנים המקריים הדו מימדיים  $(X(t), \mu(t))$  הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף?

אם כן, אז מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של שרשרת זו. אם לא, אז נמקו זאת.

(7) ג. האם מתקיים  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0) = 1$ ?

(7) ד. האם מספר הפעמים שמספר הלקוחות שבתחנה יעלה מאחד לשניים הוא סופי?