

פתרון תרגיל 7 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

כך. קיימת שרשרת כזאת. נתן דוגמא למטריצת מעבר של שרשרת כזאת בת 3 מצבים.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לשרשרת זו יש וקטור סטציונרי יחיד $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. מהמצב הראשון יש מעבר ישיר למצב השני. אין מעבר ישיר מהמצב השני למצב הראשון. מטריצת המעבר של התהליך $\{X_{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאן אין בכלל מעברים בין מצבים שונים. בכל אחת מהמחלקות יש וקטור סטציונרי יחיד. גם כל קומבינציה של וקטורים אלה היא וקטור סטציונרי. כל וקטור סטציונרי מקיים את תנאי האיזון המפורט.

שאלה 2

בלוח כזה יש $6(n-2)$ משבצות בעלות דרגה 8 (כל המשבצות חוץ מהמשבצות שבדפנות הלוח). יש $2(n-2)+12$ משבצות בעלות דרגה 5 ויש 4 משבצות בעלות דרגה 3. סכום הדרגות של כל משבצות הלוח הוא $8(6(n-2))+5(2(n-2)+12)+4 \cdot 3 = 58n - 44$. מדובר בשרשרת בעלת מספר סופי של מצבים שהיא בלתי פריקה (למלך יש מסלול מכל משבצת לכל משבצת אחרת). לכן למשבצת פינתית יש הסתברות סטציונרית $\frac{3}{58n-44}$. תוחלת מספר הצעדים עד חזרה לפינה היא $\frac{58n-44}{3}$. כאשר $n \rightarrow \infty$ אז c_n שואף ל $\frac{58}{3}$.

שאלה 3

א. תהי e_3 תוחלת זמן ההקלטות במחלקה של מצבים נשנים כאשר מתחילים במצב 3. תהי e_4 תוחלת זמן ההקלטות במחלקה של מצבים נשנים כאשר מתחילים במצב 4. מתקיים:

$$e_3 = 0.4(1+0) + 0.1(1+0) + 0.2(1+e_3) + 0.3(1+e_4)$$

$$e_4 = 0.1(1+0) + 0.5(1+e_3) + 0.4(1+e_4)$$

ב. יהי a הסיכוי לעבור ל $\{1,2\}$ מבלי שעברנו בדרך במצב 3. מתקיים $a = 0.1 + 0.5 \cdot 0 + 0.4a$ (אם נשארים במצב 4, אז לא משתנה הסיכוי).

$$a = \frac{1}{6}$$

נתן גם פתרון נוסף:

הצעד הראשון של עזיבה של מצב 4 צריך להיות למצב 2 ולא למצב 3. צעד של עזיבה של מצב 4 הוא בהסתברות $\frac{0.1}{0.1+0.5} = \frac{1}{6}$ צעד למצב 2 (לפי חישוב הסתברויות מותנות).

שאלה 4

כדי לבקר במצב 4 בצעדים זוגיים, צריך להגיע לקבוצת המצבים $\{1,2\}$ במספר צעדים אי זוגי או להגיע לקבוצת המצבים $\{3,4\}$ במספר צעדים זוגי.

בהינתן שאחד משני אלה קורה אז לאחר שמגיעים למצבים הנשנים, ההסתברות להיות בשלב זוגי במצב 4 היא 0.6 (זה יכול לקרות לאחר ביקור ב 1 או ב 2 ומשניהם הסיכוי לעבור ל 4 ולא ל 3 הוא 0.6). כאשר נמצאים במצב 5 או במצב 6 אז הסיכוי לעבור ישירות ל $\{1,2\}$ הוא 0.3 (או 0.1+0.2 או 0.3) והסיכוי לעבור ישירות ל $\{3,4\}$ הוא 0.4 (או 0.1+0.3 או 0.2+0.2).

ההסתברות להגיע ל $\{1,2\}$ במספר צעדים אי זוגי או ל $\{3,4\}$ במספר צעדים זוגי היא:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-0.3-0.4)^{2k} \cdot 0.3 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-0.3-0.4)^{2k-1} \cdot 0.4 = \frac{0.3}{1-0.3^2} + \frac{0.3 \cdot 0.4}{1-0.3^2} \cong 0.46$$

1. סיכום טורים גיאומטריים.

. התשובה המבוקשת היא $0.46 \cdot 0.6$.

שלומי