

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 1

התרגילים שאני נותן הם קצרים. עליכם ללמוד גם מתרגילים ומפתרונות של שנים קודמות שמופיעים באתר.

בתרגיל זה אין שאלות בנושא החשוב של מיון מצבים למצבים נשנים ומצבים חולפים וחלוקה למחלקות בלתי פריקות.

שאלות בנושא זה מופיעות בתרגילי 1 של שנים קודמות, למשל, בתרגיל 1 של שנת 2009.

שאלה 1

ישנם שני כדים וארבעה כדורים. בכל שלב יש חלוקה נתונה של הכדורים בין התאים. בתום כל שלב נבחר כדור אקראי ומועבר כד. יתר הכדורים נשארים באותו כד. מצאו את מטריצת המעבר של שרשרת מרקוב המתארת את התהליך המונה את מספר הכדורים שבכד הראשון בשלבים השונים.

שאלה 2

על צדו האחד של מטבע הוגן כתובה הספרה 0 ועל צדו האחר כתובה הספרה 1. מבצעים סדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של מטבע זה. עבור כל $1 \leq n < \infty$ יהי X_n שווה לתוצאת ההטלה ה- n -ית, יהי Y_n שווה לתוצאת ההטלה ה- $n+3$, יהי Z_n שווה ל $X_n + Y_n$.

א. האם הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב? אם כן, אז מצאו את מטריצת המעבר שלה ואם לא אז נמקו זאת.

ב. האם הסדרה $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?

ג. האם הסדרה $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב?

שאלה 3

אומרים ששני תהליכים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נפגשים בשלב n אם מתקיים $X_n = Y_n$. הערה: לפעמים תהליכים יכולים להפגש גם ביותר משלב אחד.

א. הביאו דוגמא לשתי שרשרות מרקוב בעלות אותה מטריצת מעבר שאינה בלתי פריקה, שהן בעלות מצבים התחלתיים שונים, כך שההסתברות שהתהליכים יפגשו אי פעם לאחר שלב 0 היא אפס.

ב. הביאו דוגמא לשתי שרשרות מרקוב בעלות אותה מטריצת מעבר שהיא בלתי פריקה, שהן בעלות מצבים התחלתיים שונים, כך שההסתברות שהתהליכים יפגשו אי פעם לאחר שלב 0 היא אפס.

ג. הביאו דוגמא לשתי שרשרות מרקוב בעלות אותה מטריצת מעבר, שהן בעלות אותו מצב התחלתי, כך שההסתברות שהתהליכים יפגשו לפחות פעמיים היא גדולה מ 0 אבל קטנה מ 1.

ד. הביאו דוגמא לשתי שרשרות מרקוב בעלות אותה מטריצת מעבר, שהן בעלות אותו מצב התחלתי, כך שההסתברות שהתהליכים יפגשו אין סוף פעמים היא אפס.