

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 13

שאלה 1

הצורה הכללית של היוצרים של שרשרות בזמן רציף בעלות שני מצבים היא

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

הקבוצה המבוקשת כאן היא של כל המטריצות מהצורה

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

זאת אומרת, שקצבי העזיבה של שני המצבים הם זהים.

בשרשרת עם שני מצבים, תמיד בזמני הקפיצות עוברים ממצב למצב. לכן, בזמני הקפיצות שכיחות

הביקורים בכל אחד משני המצבים היא חצי.

בהינתן שבמחצית מהקפיצות נשהה בכל מצב, כדי ששכיחות זמני השהות בשני המצבים תהיה זהה, צריך

שבכל אחד משני המצבים נשהה אותו זמן ממוצע עד הקפיצה ממנו.

דרך אחרת היא למצוא את הוקטורים הסטציונריים של התהליך בזמני הקפיצות ושל התהליך לאורך זמן,

ואחר-כך לבדוק מתי הם שווים. כאמור, לגבי התהליך שבזמני הקפיצות, תמיד הוקטור $(0.5, 0.5)$ הוא

וקטור סטציונרי יחיד. לגבי התהליך לאורך זמן קיימת לגבי יוצר בעל קצבי עזיבה של λ ושל μ ,

משוואה $-\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$. לכן, כדי שיתקיים $\pi_1 = \pi_2$, צריך שיתקיים $\mu = \lambda$.

הערה: אין התפלגות גבולית בזמני הקפיצות. תמיד בקפיצה זוגית נהיה במצב שבו התחלנו ובקפיצה אי

זוגית נהיה באחר. אך יש שכיחות גבולית.

שאלה 2

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t .

$$y'(t) = \lambda - \mu y(t)$$

הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + ce^{-\mu t}$$

כדי לעמוד בתנאי ההתחלה שהוא $y(0) = 1$ צריך להתקיים:

$$c = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

ולכן נקבל פתרון

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-\mu t}$$

שאלה 3

אם מספר המצבים הוא סופי, ושני התהליכים מתחילים באותו מצב, אז לפי מה שלמדנו הם יפגשו

בהסתברות 1. לכן, אם מספר המצבים הוא סופי, אז חייבים להתחיל במצב חולף. מכיון שהמחלקה של

המצבים הנשנים היא יחידה, אז אם היא סופית ולא מחזורית, אז בהכרח שני התהליכים יפגשו (שניהם

יגיעו למצבים במחלקה זו ועבור כל זוג מצבים, הם יפגשו בהמשך). לכן נבחר לתת דוגמא של שרשרת

בה המחלקה של המצבים הנשנים היא מחזורית.

נתן דוגמא למטריצת מעבר של שרשרת כזאת בת 5 מצבים:

	1	2	3	4	5
1	0	0.25	0.25	0.25	0.25
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0

מצב 1 הוא מצב חולף. כל יתר המצבים הם מחלקה אחת בעלת מחזור 4. נניח שמצב 1 הוא המצב ההתחלתי. אם ממנו שני התהליכים עוברים לאותו מצב אז אחר-כך בכל שלב הם יהיו באותו מצב. אם ממצב 1 שני התהליכים עוברים למצבים שונים אז הם כבר לעולם לא יפגשו. שני התהליכים עוברים ממצב 1 לאותו מצב בסיכוי

$$. 0.25 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.25 = 0.25$$

שלומי