

## פתרון תרגיל 9 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

א. באחד המצבים שוהים זמן  $\exp(2)$  ובמצב אחר שוהים זמן  $\exp(3)$ . מכיון שכאן בהכרח עוברים בין שני המצבים היחידים, אז הזמן עד הקפיצה השניה הוא סכום של שני משתנים מעריכיים ב"ת שוני פרמטר.

ב. כאן כל זמן המתנה לקפיצה מתפלג  $\exp(2)$ . לכן הזמן עד הקפיצה השניה הוא סכום מעריכיים שווי פרמטר.

ג. אם מתחילים באחד משני המצבים הראשונים אז בהכרח לא עוזבים אותם. בכל אחד ממצבים אלה שוהים זמן המתפלג  $\exp(1)$ . לכן אם מתחילים באחד המצבים האלה אז הזמן עד הקפיצה השניה הוא סכום של משתנים מקריים מעריכיים שווי פרמטר. שלושת המצבים האחרים מהווים גם הם מחלקה בלתי פריקה. בכל אחד מהם זמן השהות הוא משתנה מעריכי בעל פרמטר אחר. מכיון שמכל מצב אפשר לעבור לכל אחד מהמצבים האחרים, אז עבור כל מצב התחלתי הזמן עד הקפיצה השניה הוא סכום של משתנה מעריכי ומשתנה שהוא קומבינציה של שני משתנים מעריכיים שאיננה משתנה מעריכי.

### שאלה 2

$$\begin{array}{ccccccc} -\lambda & 0 & 0 & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -(1+\lambda) & 0 & 0 & \lambda & & \\ 0 & 2 & -(2+\lambda) & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -(2+\lambda) & 0 & & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -(2+\lambda) & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{array}$$

מדובר ביוצר מסדר אינסוף. מכיוון שאין יותר מ 2 שרתים, אז עצמת העזיבה אף פעם לא עולה על 2. החל מהשורה הרביעית, כל שורה היא הזזה במקום אחד של זאת שמעליה.

### שאלה 3

א.

$$\begin{cases} (-2)\pi_1 + 3\pi_2 + 1\pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 6\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 3\pi_2 - 2\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ומתקיים } \pi_2 = \frac{1}{7}, \pi_1 = \pi_3 = \frac{3}{7}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{3}{3+3} & 0 & \frac{1}{3+3} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

ג. מדובר בשרשרת אי פריקה ולא מחזורית ( ניתן לחזור לכל מצב לאחר שני צעדים וגם אחר שלושה צעדים ). וקטור ההסתברויות הסטציונרי היחיד הוא  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . לכן לכל מצב יש הסתברות

גבולית של  $\frac{1}{3}$ .

ד. בזמני הקפיצות יש לכל מצב הסתברות גבולית של  $\frac{1}{3}$ , אך במצב 2 כל שהות היא בממוצע קצרה

יותר מאשר במצבים האחרים. ( משך זמן של שהות בודדת במצב 2 מתפלג  $\exp(6)$  ובכל אחד מהמצבים האחרים משך שהות בודדת מתפלג  $\exp(2)$  ).

ה.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כאן לגבי כל המצבים יש אותה התפלגות של שהות רצופה:  $\exp(2)$ .

#### שאלה 4

צריך לבחור שעון עם קצב של לפחות 6. נבחר שעון עם קצב  $\lambda = 6$  ונקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-6t} \frac{(6t)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^k$$

או אם נבחר שעון בקצב  $\lambda = 12$  נקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-12t} \frac{(12t)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{9}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{12} & \frac{6}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{11}{12} \end{pmatrix}^k$$