

פתרון תרגיל 3 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית.
הדוגמא היא של שרשרת בת 11 מצבים $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. $P_{0,9} = P_{0,10} = 0.5$ ועבור כל $1 \leq i \leq 10$ מתקיים $P_{i,i-1} = 1$. לא ניתן לחזור מאף מצב לעצמו בפחות מ 10 צעדים. ניתן לחזור ממצב 0 לעצמו ב 10 צעדים או ב 11 צעדים. המחלק המשותף המכסימלי של 10 ו 11 הוא 1. לכן המחזור של מצב 0 הוא 1 (הוא מצב לא מחזורי). אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית, לכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים.

שאלה 2

אם כל אברי מטריצת המעבר הם חיובים ממש אז יש מסלול מכל מצב לכל מצב אחר (אפילו מסלול ישיר). לכן השרשרת היא לא פריקה (מהווה מחלקה בודדת). נשנות היא תכונה מחלקתית, לכן לא יתכן שחלק ממצבי השרשרת הבלתי פריקה יהיו נשנים ושחלק אחר יהיו חולפים.

שאלה 3

יהיו X_n גדלי המהלכים בשלב ה- n . עבור כל n מתקיים: $E(X_n) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$.
המשתנים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ הם משתנים ב"ת בעלי מומנט רביעי קבוע סופי (שווה ל 1). לכן חל עליהם החוק החזק של המספרים הגדולים. לכן סדרת הממוצעים שלהם שואפת לאפס. אך זה לא אומר שסדרת הסכומים המצטברים שלהם שווה לאפס אינסוף פעמים. זה רק מראה ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 0$, זאת אומרת שהסכומים המצטברים לא מתרחקים מאפס מהר מדי.
לכן לא ניתן לקבוע אם מצב 0 הוא נשנה רק באמצעות החוק החזק של המספרים הגדולים.

שאלה 4

יהי $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. מתקיים בודאות $\ln(n) \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \sum_{i=1}^n |X_i| = |S_n|$. מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.
לכן סדרת הממוצעים בהכרח שואפת לאפס. לא השתמשנו בתנאי האי תלות.

שאלה 5

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית.
נגדיר סדרת משתנים מקריים ב"ת כך שעבור כל n זוגי $P(X_n = 0) = 1$ ועבור כל n אי זוגי $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ ו $P(X_n = -n) = \frac{1}{n}$.
מ 1. על פי הלמה של בורל קנטלי אינסוף פעמים יתרחש מאורע $(X_n = -n)$. כאשר מתרחש מאורע כזה אז הסכום הצטבר משתנה ב $-n$ והממוצע משתנה ביותר מ $\frac{1}{2}$. לכן סדרת הממוצעים המצטברים לא שואפת לגבול.

לעומת זאת הסדרה Y_n היא סדרה של אפסים. לכן בכל נקודה הממוצע המצטבר שלה שווה לאפס ולכן החוק החזק של המספרים הגדולים חל עליה.

שלומי