

## פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים  $\{1,2\}$  ו  $\{3,4,5,6,7\}$ .

### שאלה 2

מצבים 1 ו 3 הם מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים (אי אפשר לעזוב את הקבוצה הזאת וכל אחד מהמצבים מקושר לאחר). הקבוצות  $\{7,8\}$  ו  $\{5\}$  הן שתי מחלקות נוספות של מצבים בלתי פריקים ונשנים. מצבים 2,4,6 יש מסלול למצבים שמהם אין דרך חזרה אליהם (ממצב 4 זהו מעבר לא ישיר כזה אבל זהו מעבר). לכן מצבים אלה אינם ארגודים ולכן הם חולפים.

### שאלה 3

זאת היא שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

הסבר: אם נמצאים במצב 1 או במצב 2 ולא משנה באיזה מהם, יש מעבר למצב 3 בהסתברות 0.3. המעברים למצב 3 הם זהים משני מצבים אלה. לכן ההיסטוריה וזהות התקופה לא מוסיפים אינפורמציה רלוונטית.

### שאלה 4

עבור  $a = 0.4$  זאת היא שרשרת מרקוב הומוגנית. במקרה זה  $W_n$  אומר לנו בדיוק היכן על הישר אנו נמצאים. אם  $W_n$  לא שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה שלילית אנו נמצאים ואם  $W_n$  שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה חיובית על הישר אנו נמצאים. ידיעת הערך המדויק של  $X_n$  נותנת את כל האינפורמציה הנחוצה לצעד הבא. הערה: כך לגבי כל  $a$  לא שלם,  $W_n$  היא שרשרת מרקוב הומוגנית.

עבור  $a = 2$  אין מרקוביות. אם למשל  $(W_1 = 3, W_2 = 2)$  אז ברור ש  $(X_1 = -1)$  וש  $(X_2 = 0)$  ואם למשל  $(W_1 = 1, W_2 = 2)$  אז אנו או ב  $(X_2 = 0)$  או ב  $(X_2 = 2)$ . משתי הנקודות האלה ההסתברויות לקבלת ערכי  $W_3$  שונים הן שונות. לכן  $W_1$  מוסיף אינפורמציה רלוונטית ולא כל המידע הרלוונטי נמצא בערכו של  $W_2$ .

עבור  $a = 1$  אין הומגניות בזמן.  
אם  $W_n$  נתון ו  $n$  נתון אז נוכל לדעת בדיוק היכן אנו נמצאים. למשל אם  $W_n$  זוגי ו  $n$  זוגי, אז נוכל לדעת שאנו במקום שבו  $X_n > 0$  ונוכל גם לדעת בדיוק מהו ערכו של  $X_n$ . אבל אנו צריכים לדעת אם  $n$  זוגי או אי זוגי. אם למשל  $n = 2$  ו  $W_n = 1$  זה אומר שאנו בראשית, אבל אם למשל  $n = 1$  ו  $W_n = 1$  זה אומר שאנו בנקודה 1. מכיון שההילוך אינו סימטרי, אז בכל אחד מהמקרים ההתפלגות של  $W_2$  היא שונה.

---

שלומי