

מבוא לתהליכים סטוכסטיים / תרגיל 3

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה.
לא קיימת שרשרת מרקוב שבה לא ניתן לחזור משום מצב לעצמו תוך פחות מ 10 צעדים, אך כל מצבי השרשרת הם לא מחזוריים.

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה.
לא קיימת שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר שכל איבריה חיוביים ממש שבה יש אינסוף מצבים חולפים וגם אינסוף מצבים נשנים.

שאלה 3

נתונה שרשרת מרקוב שמצביה הם כל השלמים. שבה עבור כל i מתקיים $P_{i,i-1} = P_{i,i} = P_{i,i+1} = \frac{1}{3}$.
האם ניתן למיין את מצבי השרשרת לפי החוק החזק של המספרים הגדולים?

שאלה 4

נתונה X_1, X_2, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$$P\left(X_n = +\frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = 0.5$$

הוכיחו שעל סדרה זו חל החוק החזק של המספרים הגדולים.
האם היה חיוני להניח שהמשתנים הם בלתי תלויים?

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה:

אם $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים כך שעבור כל n מתקיים $E(|X_n|) < 5$, ושהחוק החזק של המספרים הגדולים לא חל עליה, אז גם חוק זה לא חל על הסדרה $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על-ידי $Y_n = \max\{X_n, X_{n+1}\}$ עבור כל $n \geq 1$.
