

פתרון לבחינה מ 25.05.26

שאלה 1

התשובה היא ב'.

$$\frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ תוחלת בעלת תוחלת } 2.5.$$

למשל הסיכוי שרק בשלב הראשון נהיה ימנה לראשית היא 0.4 והסיכוי שרק בשלבים הראשון והשני נהיה ימינה לראשית הוא $0.6 \cdot 0.4$.

שאלה 2

התשובה היא ד'.

$$\frac{1-0.6^2}{1-0.6^4} \text{ היא המותנה}$$

במכנה, מופיעה הסתברות המשלים של ארבעה צעדים ימינה. במונה מופיעה ההסתברות שגם לאחר שני צעדים וגם לאחר ארבעה צעדים נהיה בראשית, זאת ההסתברות שכבר לאחר הצעד השני הגענו לראשית. זאת ההסתברות המשלים של שני צעדים ימינה.

שאלה 3

התשובה היא ב'.

נתן דוגמה שבה כל השונות המשתופות הן שליליות: נסתכל על משתנה גיאומטרי. סדרת המשתנים תהיה סדרת האינדיקטורים של המאורעות לקבלת הערכים האפשריים של המשתנה הגיאומטרי. לכל אינדיקטור יש שונות שלא גדולה מרבע. יש קשר שלילי בין כל שני מאורעות (כל אחד מהם לחוד יכול להתרחש, אבל כל חיתוך בין שניים מהם הוא בלתי אפשרי).

כעת נראה שלא תתכן שונות משותפת שקטנה מ -0.1 בין כל שני משתנים. נניח בשלילה שכל השונות המשותפות קטנות מ -0.1 .

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j) \leq n + 2 \binom{n}{2} (-0.1)$$

עבור ערכי מספיק גדולים סכום זה הוא שלילי. אבל שונות הסכום כמו שונות של כל משתנה לא יכולה להיות שלילית.

הערה

טיעונים אלה תקפים גם עבור כל קבוע שלילי ולא רק -0.1 .

שאלה 4

התשובה היא ג'.

זו ההסתברות שכל המשתנים קטנים או שווים ל 999 פחות ההסתברות שכולם קטנים או שווים ל 998.

$$\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000} = \left(\frac{998}{1000}\right)^{1000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} - \left(1 - \frac{2}{1000}\right)^{1000} \cong \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

שאלה 5

התשובה היא ד'.

נסתכל על קבוצת 98 האינדיקטורים שמייצגים את המאורעות שאנשים עומדים בין השניים. כל אינדיקטור כזה הוא הצלחה בסיכוי שלישי. לכן סכום השוניות של האינדיקטורים הוא $98 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$. אם אדם מסוים עומד בין השניים, אז גדל הסיכוי שהשניים רחוקים אחד מהאחר, וגדל הסיכוי של כל אדם אחר לעמוד בין השניים. לכן השוניות המשותפות בין האינדיקטורים הן חיוביות. הסיכוי ששני אינדיקטורים מסוימים להיות הצלחה הוא ששית (שבסידור של ארבעה שניים מסוימים יהיו בקצוות). לכן כל שונות משותפת שווה ל $\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

שאלה 6

התשובה היא א'.

לגבי חמישים מסוימים, הסיכוי שכולם ישבו במקומם הוא $\frac{50!}{100!} = \frac{(100-50)!}{100!}$. יש $\binom{100}{50}$ קבוצות של חמישים אנשים. הסתברות איחוד לא גדולה מסכום הסתברויות, ולכן ההסתברות שיש לפחות קבוצה אחת שמקיימת את התנאי, לא גדולה מ $\frac{1}{50!} \cdot \binom{100}{50} = \frac{50!}{100!}$.

הערות

אי שיויונות מרקוב וצ'בישב נותנים חסמים הרבה יותר גדולים. אבל הם רק אי שיויונות, וכאן הם נותנים חסמים מאוד לא הדוקים. גם כאן השתמשנו באי שיויון. שהוא לא הדוק, אבל הוא יותר טוב מהחסמים שנותנים האי שיויונות מרקוב וצ'בישב.

שאלה 7

התשובה היא א'.

עבור כל $t > 0$ המאורע שבקטע זמן באורך t יגיע אוטובוס הוא המאורע שמשתנה $P(t)$ יקבל ערך שונה מאפס. יש לו הסתברות $1 - e^{-t}$. זו ההסתברות שהנוסע יצטרך לחכות זמן שקטן מ t . זו ההסתברות המצטברת של זמן ההמתנה בנקודה t . זו פונקציית הסתברות מצטברת של משתנה $exp(1)$. לכן זמן ההמתנה מתפלג $exp(1)$ שלו יש תוחלת אחד.

שאלה 8

התשובה היא ב'.

מתקבלת נקודה שמתפלגת אחיד בתוך מלבן ששטחו $2 \cdot 3 = 6$, מכיון שההתפלגות היא אחידה, אז ההסתברות של מאורע שווה לשטחו חלקי השטח הכולל. המאורע מתרחש במשולש ישר זווית שווה שוקיים שהקודקוד שלו הוא $(2,4)$ ושאורכי הניצבים שלו הם חצי.

הערה

ההתפלגות של הסכום היא רציפה, ולכן ההסתברות לקבל ערך קטן או שווה שווה להסתברות לקבל ערך קטן.

שאלה 9

התשובה היא ב'.

המשתנה הבינומי שווה לסכום של עשרה אינדיקטורים ב"ת. החזקה שווה לחזקה של סכום האינדיקטורים ששווה למכפלת החזקות שלהם. תוחלת החזקה שווה למכפלת התוחלות של חזקה של אינדיקטור בודד. תוחלת החזקה של אינדיקטור בודד היא

$$(-0.5)^{10} = \frac{1}{1024} \text{ לכן התוחלת המבוקשת היא } \frac{1}{4} \cdot (-1)^0 + \frac{3}{4} \cdot (-1)^1 = -0.5$$

נחשב גם בדרך אחרת:

$$\begin{aligned} E(-1)^X &= \sum_{k=0}^{10} P(X=k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k} (-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(-\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k} = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \end{aligned}$$

שאלה 10

התשובה היא א'

אם בסיכוי חצי כל המשתנים מקבל את הערך אחד ובסיכוי חצי כל המשתנים מקבלים את הערך מינוס אחד, אז סדרת הממוצעים לא שואפת לגודל ידוע מראש והחוק החזק לא חל על הסדרה המקורית. אבל סדרת הממוצעים של הרבועים תמיד שווה לאחד והחוק החזק חל על הרבועים.

אם בסיכוי חצי כל המשתנים שווים לאפס ובסיכוי חצי כל משתנה מקבל את הערך אחד בסיכוי חצי ואת הערך מינוס אחד בסיכוי חצי, וזאת באופן ב"ת במשתנים האחרים, אז בכל מקרה סדרת הממוצעים שואפת בהסתברות אחת לאפס. במקרה הראשון היא תמיד שווה לאפס, ובמקרה השני היא שואפת לאפס בהסתברות אחת בגלל שיש אי תלות (בהינתן המקרה השני) ויש מומנט רביעי ששווה לקבוע הסופי אחד. לכן החוק החזק חל על הסדרה. אבל ממוצעי סדרת הרבועים הם במקרה הראשון תמיד שווים לאפס ובמקרה השני תמיד שווים לאחד. לכן החוק החזק לא חל על סדרת הממוצעים.

שאלה 11

קיימים משתנים כאלה. דוגמא למשתנה כזה היא של משתנה שמקיים $P(X=6) = P(X=0.3) = 0.5$