זהו קובץ תרגילים במבוא להסתברות. חבור שאלות ובחירת שאלות אחרות הושפעו מטעמי האישי, לכן הקובץ לא מייצג את כל נושאי הקורס. אני מודע לעובדה שחלק מהשאלות הן בבחינת שאלות העשרה.

שאלה

שיכור נע על ציר ה-X. הוא מתחיל את מסעו בנקודה 0. בכל דקה הוא זז ימינה יחידה בסיכוי 0.5 וזז שמאלה יחידה בסיכוי 0.5. מהי ההסתברות שלאחר 10 דקות הוא עדיין לא יבקר בנקודה 5 + ?

פתרון

נשים לב שב 10 הדקות הראשונות הוא יוכל לבקר בנקודה 5 + רק לאחר 5 או 7 או 9 דקות.
נסמן ב S_n את מיקומו לאחר n דקות.

$$P(S_5=5)=0.5^5 \quad , \quad P(S_7=5)=\binom{7}{6}0.5^6 0.5^1 \quad , \quad P(S_9=5)=\binom{9}{7}0.5^7 0.5^2$$

$$P(S_5=5 \quad , \quad S_7=5)=0.5^5\binom{2}{1}0.5^1 0.5^1$$

$$P(S_5=5 \quad , \quad S_9=5)=0.5^5\binom{4}{2}0.5^2 0.5^2$$

$$P(S_7=7 \quad , \quad S_9=5)=\binom{7}{6}0.5^6 0.5\binom{2}{1}0.5^1 0.5^1$$

$$P(S_5=5 \quad , \quad S_7=5 \quad , \quad S_9=5)=0.5^5\binom{2}{1}0.5^1 0.5^1\binom{2}{1}0.5^1 0.5^1$$

על-פי נוסחת ההכלה וההפרדה ההסתברות המבוקשת שווה ל

$$1-P(S_5=5)-P(S_7=5)-P(S_9=5)+P(S_5=5 \quad , \quad S_7=5)+P(S_5=5 \quad , \quad S_9=5)+$$
$$+P(S_7=5 \quad , \quad S_9=5)-P(S_5=5 \quad , \quad S_7=5 \quad , \quad S_9=5)$$

שאלה

חיים ומשה מקיימים סדרת משחקים. בכל משחק יש מנצח אחד מבינהם. חיים מנצח בסיכוי $\frac{2}{3}$ באופן בלתי תלוי במשחקים אחרים. הראשון שמנצח בשני משחקים רצופים זוכה בסדרה. מה סיכויו של חיים לזכות בסדרה ?

פתרון

דרך ראשונה לפתור היא על-ידי סכום טורים. אך אפתור בדרך אחרת.
יהי a שווה לסכויי חיים לנצח לאחר שזכה במשחק האחרון ועדין לא נפלה הכרעה בסדרה.
יהי b שווה לסכויי חיים לנצח לאחר שהפסיד במשחק האחרון ועדין לא נפלה הכרעה בסדרה.
מתקיים:

$$\begin{cases} a=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot b \\ b=\frac{2}{3}a \end{cases}$$

מכאן $a=\frac{6}{7}$ ו $b=\frac{4}{7}$.

סכויו של חיים לפני שהתחילה הסדרה הם $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{21}$

שאלה

מבצעים סדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת. תוצאה נקראת מכסימום זמני אם היא גדולה מכל קודמותיה. מהי ההסתברות שכל התוצאות 1,2,3,4,5 יתקבלו כמכסימום זמני ?

פתרון

לא במקרה השאלה ניתנה בבחינה אמריקאית. בדרך כלל אני שם דגש על הדרך, אך כאן התשובה הסופית שהיא $\frac{1}{6!}$ היא חשובה במיוחד (סדר ההופעות הראשונות של המספרים 1,2,3,4,5,6 צריך להיות מונוטוני).

פתרון מלא

סדרה לא משובשת היא סדרה שבה עדיין יש אפשרות שכל התוצאות 1,2,3,4,5 יתקבלו כמכסימום זמני גם אם הן עדיין לא התקבלו.

a_0 היא ההסתברות שהסדרה לא תשובש לפני שהיא התחילה.

עבור כל $1\le i\le 5$ יהיה a_i ההסתברות שהסדרה לא תשובש בהינתן שעד כה היא לא שובשה והתוצאה המכסימלית עד כה היא i.

במצב i , $0\le i\le 4$, יש הסתברות של $\frac{i}{6}$ שנקבל בהטלה הקרובה תוצאה שאינה גדולה מתוצאת המכסימום עד כה, יש הסתברות של $\frac{1}{6}$ שנעבור למצב $i+1$ ואחרת נדלג על מספרים והסדרה תשובש.

מתקיים:

$$a_5=1$$

$$a_4=\frac{4}{6}a_4+\frac{1}{6}a_5$$

$$a_3=\frac{3}{6}a_3+\frac{1}{6}a_4$$

$$a_2=\frac{2}{6}a_2+\frac{1}{6}a_3$$

$$a_1=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{6}a_2$$

$$a_0=\frac{1}{6}a_1$$

ומתקבל פתרון $a_0=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$ כנדרש.

שלומי

<u>שאלה</u>

נתונות 3 קוביות הוגנות. בכל סיבוב מטילים את כל הקוביות שעדיין לא קבלו תוצאה 6 בהטלות קודמות. כל ההטלות של כל הקוביות הן בלתי תלויות. מהי תוחלת מספר סיבובי ההטלות ?

<u>פתרון</u>

יהיו a_i - תוחלת מספר ההטלות כאשר נותרו i קוביות. אנו מחפשים את a_3 . מתקיים $a_0 = 0$ ו $a_1 = 6$ (כאשר נותרה קוביה אחת אז הזמן עד קבלת תוצאה 6 בה מתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$).

כאשר מטלים i קוביות אז מבזבזים הטלה ומגיעים בשלב הבא למצב שהוא בין 0 ל i .

מתקיים:

$$a_2 = 1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 a_0 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot a_1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 a_2$$

$$a_3 = 1 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 a_0 + \binom{3}{1} \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 a_1 + \binom{3}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 a_3$$

מפתרון המשוואות מקבלים $a_3 \cong 10.55$.

<u>פתרון בדרך שניה</u>

קוביה מסוימת כבר לא מוטלת בשלב ה- n בהסתברות $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ ולכן ההסתברות שכולן כבר לא מוטלות בשלב ה- n היא $\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^3$. ההסתברות שתהיה לפחות הטלה אחת בשלב ה- n היא $1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^3$. זאת היא תוחל האינדיקטור של השלב ה- n. התוחלת של מספר הסיבובים שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3\left(\frac{5}{6}\right)^n - 3\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right) = \frac{3}{1 - \frac{5}{6}} - \frac{3}{1 - \frac{25}{36}} + \frac{1}{1 - \frac{125}{216}} = \cdots$$

שלומי

שאלה

הביקוש היומי לעיתונים בקיוסק הוא משתנה בעל התפלגות $G(0.02)$. הרווח של בעל הקיוסק על כל עיתון הוא 0.6 ש"ח. מחיר כל עיתון לבעל הקיוסק הוא 2.4 ש"ח. עיתון שלא נמכר עד סוף היום נזרק. עיתון שלא סופק לקונה גורם לבעל הקיוסק נזק של אבדן מוניטין, נזק זה נאמד ב 0.06 ש"ח לכל עיתון שלא סופק לקונה. כמה עיתונים על בעל הקיוסק להזמין על-מנת שתוחלת הרווח שלו תהיה מכסימלית ?

פתרון

נסתכל על $f(x)$ שהיא ההפרש בין הרווח הממוצע בהזמנת $x+1$ עיתונים לבין הרווח הממוצע בהזמנת x עיתונים. נבדוק מתי היא חיובית. אם הביקוש הוא יותר מ x אז הרווח הוא חיובי. אם הביקוש הוא פחות מ $x+1$ אז הרווח הוא שלילי. בסכוי 0.98^x הוזמנו יותר מ x .

$$f(x)=0.98^x\cdot(0.6+0.06)-(1-0.98^x)\cdot 2.4=0.98^x\cdot 3.06-2.4$$

$$f(x)>0\Rightarrow 0.98^x<\frac{2.4}{3.06}\Rightarrow x<\frac{\log(\frac{2.4}{3.06})}{\log(0.98)}\Rightarrow x<12.02$$

לכן עד 12.02 משתלם להזמין יותר עיתונים, לכן משתלם להזמין 13.

שאלה

מבצעים סדרה אינסופית של הטלות של קוביה הוגנת. הטלה i היא מכסימום זמני אם תוצאתה גבוהה ממש מכל התוצאות הקודמות. חשב את תוחלת X-מספר תוצאות המכסימום.

פתרון

כל מספר k $1\le k\le 6$ מופיע בתוצאת מכסימום זמני אחת או באף לא תוצאת מכסימום זמני.
הסכוי שעד הופעתו הופיעו רק מספרים הקטנים ממנו ממש הוא:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^{i-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{k-1}{6}}=\frac{1}{7-k}$$

(התוצאה מאוד אינטואיטיבית, הוא צריך להופיע ראשון מבין $7-k$ מספרים)

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{7-k}=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=2.45$$

שלומי

שאלה: הוכח את הזהות הבאה על-ידי שיקולים קומבינטוריים:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+m-k-2}{m-k} = \binom{n+m-1}{m}$$

פתרון: יש $n+m-1$ כדורים הממוספרים בין 1 ל $n+m-1$, ו-$\binom{n+m-1}{m}$ הוא מספר האפשרויות לבחור m מביניהם. בגלל שאלה רשום ביטוי למספר זה על-פי חלוקה למקרים. החלוקה היא לפי אורך הרצף של המספרים העוקבים החל מ 1 שבהם בוחרים. הרצף יכול להיות באורך 0 והמשמעות של זה היא שלא בוחרים ב 1, או באורך כלשהו שלא גדול מ m. אם הרצף הוא באורך k, אז בוחרים במספרים $\{1,2,3,\dots,k\}$ וכדי שהרצף לא יהיה ארוך יותר לא בוחרים בכדור $k+1$, בנוסף בוחרים ב $m-k$ כדורים נוספים מבין $(n+m-1)-(k-1)=n+m-k-2$.

שאלה: מפזרים חמישה כדורים הממוספרים במספרים 1 עד 5 בחמישה תאים הממוספרים אף הם ב-1 עד 5. מה ההסתברות שלפחות שני כדורים יכנסו לתאים הנושאים את מספרם?

פתרון מקוצר:

$$p=\frac{\binom{5}{2}\cdot 2+\binom{5}{3}\cdot 1+0+1}{5!}=\frac{31}{120}$$

שאלה: במשרד ממ"ס עובדות 10 פקידות המבקרות באותה מספרה, כל אחת מהן נזקקת למספרה פעם בשבוע ובוחרת את יום הביקור באופן מקרי מבין ששת ימי השבוע. מהי התוחלת והשונות של מספר הימים בשבוע שבהם אף אחת אינה מבקרת במספרה.

פתרון מקוצר:

$$E(X)=6\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}$$

$$V(X)=6\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}\right)+$$

$$+\binom{6}{2}\cdot 2\cdot\left(\left(1-\frac{2}{6}\right)^{10}-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}\right)$$

שאלה: בשק שלושה מטבעות, שניים מהם הוגנים והאחרון נופל על ראש בהסתברות p. מוציאים מן השק שני מטבעות ללא החזרה, ומטילים אותם. בהינתן שהם נפלו על אותו צד, מה הסיכוי שבשק נשאר המטבע המוטה?

פתרון:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 0.5\cdot 0.5}{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 0.5\cdot 0.5+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot p+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 0.5(1-p)}$$

שאלה: שמונה ילדים רוצים להתחלק לשתי קבוצות של ארבעה ילדים. הם מבצעים סדרת הטלות שבסופה תקבע החלוקה. בכל שלב כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן, אם ארבעה מקבלים "עץ" וארבעה "פלי" אז נקבעת החלוקה לשתי קבוצות: אלה שקיבלו "עץ" ואלה שקיבלו "פלי", אחרת ממשיכים לשלב הבא. א. חשב את תוחלת מספר השלבים.
ב. יואב מציע לבצע סדרה אחרת: הוא לא יטיל אף פעם מטבע ורק שבעת האחרים יטילו מטבעות בשלב. שבדיוק ארבעה יקבלו "עץ" או בדיוק שלושה יקבלו "עץ", תפסק הסדרה והוא יצטרף לקבוצת המיעוט. חשב את תוחלת מספר השלבים בדרך זו.

פתרון: א. בכל שלב ההסתברות שתתקבל חלוקה מתאימה היא $\binom{8}{4}/2^8=\frac{70}{256}$.
אם לא תתקבל חלוקה מתאימה אז נעבור לשלב הבא. מספר השלבים מתפלג $G\left(\frac{70}{256}\right)$
ולכן הוא בעל תוחלת $\frac{256}{70}\cong 3.66$
ב. בכל שלב תתקבל חלוקה מתאימה בהסתברות $\frac{\binom{7}{4}+\binom{7}{3}}{2^7}=\frac{70}{128}$.
שוב מספר השלבים מתפלג גיאומטרית, אך הפעם $G\left(\frac{70}{128}\right)$ והוא בעל תוחלת: $\frac{128}{70}\cong 1.83$

חומר למחשבה: האם יש לשיטתו של יואב מגרעות.

שאלה: בר"ד "אדם וממון" מגרילים פרס של 100 ש"ח, משתתפים בהגרלה כל כרטיסי הכניסה שנמכרו בתקופת זמן מסוימת של 5 דקות, ונוסף כרטיס אחד ריק; אם הכרטיס הריק יוצא בהגרלה, הפרס אינו מוענק. בהנחה שבמשך 5 דקות נמכרים בממוצע 4 כרטיסי כניסה, חשב את: א. ההסתברות שהפרס אינו מוענק.
ב. תוחלת הסכום שהר"ד משלם בהגרלה זו. ג. שונות הסכום שהר"ד משלם בהגרלה זו.
רמז: מספר כרטיסי הכניסה מתפלג פואסונית.

פתרון: יהי X מספר האנשים המגיעים. יהי Y משתנה אינדיקטור שמקבל את הערך 1 אם הפרס מחולק ואחרת את הערך 0. יהי Z גודל הסכום שמשולם.

$$P(Y=0)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot\frac{1}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4}\cdot\frac{4^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4}\cdot\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-4}\cdot\frac{4^k}{k!}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-P(X=0)\right)=0.25\cdot(1-e^{-4})\Longrightarrow P(Y=1)=0.75+0.25\cdot e^{-4}$$

$$Z=100\cdot Y\Longrightarrow E(Z)=100\cdot E(Y)=75+25\cdot e^{-4},$$

$$V(Z)=100^2\cdot V(Y)=10,000\left(0.75+0.25\cdot e^{-4}\right)\cdot 0.25\left(1-e^{-4}\right)=$$

$$=625\cdot\left(3+e^{-4}\right)\left(1-e^{-4}\right)$$

שלומי

שאלה: בוחרים באקראי ארבע משבצות בלוח שחמט ומציבים בהן צריחים.
חשב את תוחלת ושונות מספר זוגות הצריחים שיכולים להכות אחד את השני.

פתרון:

בהינתן מיקום של צריח, צריח אחר יכול להכות אותו בסיכוי $\frac{14}{63}=\frac{2}{9}$. יש $\binom{4}{2}=6$ זוגות של צריחים, לכן תוחלת מספר הזוגות שיכולים להכות אחד את השני היא $6\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{3}$.

יהי X - מספר הזוגות שיכולים להכות אחד את השני $X=\sum_{i=1}^{6}X_i$, כאשר X_i הוא אינדיקטור לכך שהזוג i יכול להכות אחד את השני.

$$V(X)=6\cdot V(X_1)+\sum_{i\neq j}cov(X_i,X_j)$$

$$X_1\sim B\left(1,\frac{2}{9}\right)\implies V(X_1)=\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}=\frac{14}{81}$$

לכל זוג יש ארבע זוגות שאיתם יש לו צריח אחד משותף וזוג אחד שזר לו.

נניח של X_1 ול X_2 יש צריח אחד משותף אז,

$$cov(X_1,X_2)=E(X_1\cdot X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)=$$
$$=\frac{2\cdot 7}{63}\cdot\frac{6+7}{62}-\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cong-0.0028$$

נניח של X_1 ול X_3 אין צריח משותף אז,

$$cov(X_1,X_3)=E(X_1\cdot X_3)-E(X_1)\cdot E(X_3)=$$
$$=\frac{14}{63}\cdot\left(\frac{6}{62}\cdot\frac{5+7}{61}+2\cdot\frac{7}{62}\cdot\frac{6+7}{61}+\frac{42}{62}\cdot\frac{7+7}{61}\right)-\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cong 0.00009$$

ולסכום:

$$V(X)\cong 6\cdot\frac{14}{81}+6\cdot 4\cdot(-0.0028)+6\cdot 0.0009\cong 0.97$$

שאלה: שושלת מתפתחת לפי התהליך הבא: כל פרט משאיר אחריו צאצאים באופן בלתי תלוי בפרטים אחרים ובעבר. בסיכוי 0.5 אינו משאיר אחריו צאצאים, בסיכוי 0.25 משאיר אחריו צאצא אחד ובסיכוי 0.25 משאיר אחריו שני צאצאים. חשב את a - ההסתברות שהשושלת תכחד.

פתרון: אם בדור מסוים יש k פרטים אז הסיכוי שהשושלת תכחד הוא a^k, זאת מכיון שיש לנו למעשה k שושלות בלתי תלויות שצריכות להכחד כדי שתהיה הכחדות כללית. מכיון שבדור ההתחלתי יש פרט אחד, אז,

$$a=0.5\cdot 1+0.25\cdot a+0.25a^2\iff a^2-3a+2=0$$

זאת מכיון שקיימות אפשרויות שהשושלת תכחד כבר בדור הבא או שיוצרו אחת או שתי שושלות בלתי תלויות. a היא הסתברות לכן $a\in[0,1]$, הפתרון היחיד בקטע זה הוא $a=1$, לכן השושלת תכחד בודאות.

שלומי

שאלה: <u>מטילים</u> קוביה 75 פעמים. יהי X מספר הפעמים שבהם הופיע רצף של שלוש תוצאות שהן קטע של שלושה מספרים רצופים בסדרת פיבונצ'י.

א. חשב את התוחלת והשונות של X. ב. הוכח $P(X\ge1)<0.9$.

פתרון: א. יש 73 רצפים של 3 מספרים. יהי X_i האינדיקטור להצלחה ברצף i. $X=\sum_{i=1}^{73}X_i$. $E(X)=\sum_{i=1}^{73}E(X_i)$. X_i הוא הצלחה אם הופיע 1,1,2 או 1,2,3 או 2,3,5 לכן $E(X_i)=\frac{3}{6^3}=\frac{1}{72}$, $E(X)=\frac{73}{72}\cong1.014$.

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}V(X_i)+\sum_{i\neq j}cov(X_i,X_j)\overset{*}{=}\sum_{i=1}^{73}V(X_i)+\sum_{i=1}^{72}2\cdot cov(X_i,X_{i+1})+\sum_{i=1}^{71}2\cdot cov(X_i,X_{i+2})$$

(*משתנה X_i תלוי רק במשתנים שעליו אינדקס במרחק 1 או 2 ממנו, כי עם רצפים אחרים אין הטלות משותפות, צריך לספור גם את $cov(X_i,X_{i+1})$ וגם את $cov(X_{i+1},X_i)$)

$$\sum_{i=1}^{73}V(X_i)=73\cdot\frac{1}{72}\left(1-\frac{1}{72}\right)\cong1\ ;\ cov(X_i,X_{i+1})=E(X_i\cdot X_{i+1})-E(X_i)\cdot E(X_{i+1})$$

$X_i\cdot X_{i+1}=1$ אם X_i וגם X_{i+1} הם הצלחה. זה יכול לקרות אם מופיע רצף 1,1,2,3 או רצף 1,2,3,5 לכן:

$$cov(X_i,X_{i+1})=\frac{2}{6^4}-\left(\frac{3}{6^4}\right)^2\cong1.35\cdot10^{-3}\ ;\ \sum_{i=1}^{72}2\cdot1.35\cdot10^{-3}\cong0.194$$

$X_i\cdot X_{i+2}=1$ אם מופיע רצף של 1,1,2,3,5 לכן:

$$cov(X_i,X_{i+2})=\frac{1}{6^5}-\left(\frac{3}{6^3}\right)^2\cong-6.43\cdot10^{-5}$$

$$\sum_{i=1}^{71}2\cdot cov(X_i,X_{i+2})=-142\cdot6.43\cdot10^{-5}\cong0.009$$

לסכום $V(X)\cong1+0.194-0.009\cong1.18$

ב. $$P(X\ge1)=P\left(\left(\sum_{i=1}^{35}X_i\ge1\right)\cup\left(\sum_{i=36}^{38}X_i\ge1\right)\cup\left(\sum_{i=39}^{73}X_i\ge1\right)\right)$$

$$P\left(\sum_{i=36}^{38}X_i\ge1\right)\le\frac{3\cdot3}{6^3}<0.05$$ (על פי אי שוויון מרקוב)

נניח בשלילה ש- $P(X\ge1)\ge0.9$.

נתמקד על כך שההסתברות איחוד אינה גדולה מסכום ההסתברויות: $P(X\ge1)\ge0.9$

$$\Longleftarrow P\left(\left(\sum_{i=1}^{35}X_i\ge1\right)\cup\left(\sum_{i=39}^{75}X_i\ge1\right)\right)\ge0.9-0.05=0.85 \Longleftarrow P\left(\left(\sum_{i=1}^{35}X_i=0\right)\cap\left(\sum_{i=39}^{73}X_i=0\right)\right)\le0.15$$

אך בגלל ש- $\sum_{i=1}^{35}X_i$ ו- $\sum_{i=39}^{73}X_i$ הם בלתי תלויים, אז

<u>המשך בעמוד הבא</u>

$$P\left(\left(\sum_{i=1}^{35}X_i=0\right)\cap\left(\sum_{i=39}^{73}X_i=0\right)\right)=P\left(\sum_{i=1}^{35}X_i=0\right)\cdot P\left(\sum_{i=39}^{73}X_i=0\right)\le 0.15$$

מכיון ש- $\sum_{i=1}^{35}X_i$ ו- $\sum_{i=39}^{73}X_i$ הם שווי התפלגות, אז

$$\Longleftarrow\quad P\left(\sum_{i=1}^{35}X_i\ge1\right)=P\left(\sum_{i=39}^{73}X_i\ge1\right)\ge 1-\sqrt{0.15}\cong0.61$$

$\Longleftarrow$ $E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{73}X_i\right)\ge2\cdot0.61>E(X)$ $\Longleftarrow$ הגענו לסתירה להנחה $P(X\ge1)\le0.9$.

הערה: מכיון ש- $E(X)>1$, אז אי אפשר לקבל חסם קטן מ-1 ל- $P(X\ge1)$ רק על ידי שימוש ישיר באי שוויונות צ'בישב ומרקוב.

"בעית המזכירה הרשלנית": מזכירה מכניסה n מכתבים ממוענים ל-n מעטפות מתאימות, אך באופן אקראי (יש n מענים שונים ולכן n! סידורים שונים אפשריים). יהי X מספר ה"התלכדויות" - מספר המעטפות המכילות מכתב נכון. הנחה ש-n זוגי, מצא חסם עליון להסתברות $P(X\ge n/2)$.

פתרון:
אם יש לפחות $n/2$ התלכדויות, אז יש לפחות תת קבוצה אחת של $n/2$ מכתבים שיגיעו למענם. לתת קבוצה של $n/2$ מכתבים ההסתברות להתלכדות דרושה $\frac{(n/2)!}{n!}$.
יש $\binom{n}{n/2}$ תתי קבוצות בגודל $n/2$, לכן תוחלת מספר תתי הקבוצות שבהן יש התלכדות מלאה היא: $\binom{n}{n/2}\cdot\frac{(n/2)!}{n!}=\frac{1}{(n/2)!}$. על-פי אי שוויון מרקוב, ההסתברות שתהיה לפחות תת קבוצה אחת מלאה של התלכדויות, איננה גדולה מ- $\frac{1}{(n/2)!}$.

שאלה: $X_1\sim U(1,6)$, $X_2\sim U(1,6)$, $X_3\sim U(1,6)$; X_1,X_2,X_3 בלתי תלויים.
חשב $P(X_1\le X_2\le X_3)$.

פתרון:

$$P(X_1\le X_2\le X_3)=P(X_1=X_2=X_3)\cdot1+P\left(\text{התקבלו בדיוק שתי תוצאות שוות}\right)\cdot\frac13+P\left(\text{התקבלו שלוש תוצאות שונות}\right)\cdot\frac{1}{3!}=$$

$$=\frac{6}{6^3}\cdot1+\frac{6\cdot5\cdot3}{6^3}\cdot\frac13+\frac{\binom63\cdot3!}{6^3}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{56}{216}$$

שלומי

טענות שלא קשורות בהסתברות: א. בכל קבוצה של שני אנשים יש שניים שמכירים אחד את השני או שניים שלא מכירים אחד את השני. ב. בכל קבוצה של שישה אנשים יש תת קבוצה של שלושה שבה כל אחד מכיר אחד את השני או יש תת קבוצה של שלושה שבה כולם אינם מכירים אחד את השני. ג. עבור כל s,t קיים n סופי כך שמכל קבוצה של n אנשים יש תת קבוצה של s אנשים שבה כולם מכירים אחד את השני או תת קבוצה של t אנשים שבה כולם אינם מכירים אחד את השני.

שאלה: הוכח שקבוצה של 1,000 אנשים יתכן שלא תהיה קבוצה של 30 אנשים שבה כולם מכירים אחד את השני וגם לא תהיה קבוצה של 30 אנשים שבה כולם אינם מכירים אחד את השני.

פתרון:

נניח שכל אחד מכיר אחר בסכוי 0.5 אז תת קבוצה של 30 אנשים כולם מכירים את כולם בסכוי $0.5^{\binom{30}{2}}$ וכולם אינם מכירים את כולם בסכוי $0.5^{\binom{30}{2}}$, יש $\binom{1,000}{30}$ תת קבוצות כאלה, לכן בגלל שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות, אז תוחלת X- מספר התת קבוצות האלה הינו $2\cdot\binom{1,000}{30}\cdot 0.5^{\binom{30}{2}}$.

$$E(X)=2\cdot\binom{1,000}{30}\cdot 0.5^{\binom{30}{2}}<2\cdot 1,000^{30}\cdot 0.5^{\frac{30\cdot 29}{2}}<2\cdot 2^{300}\cdot 0.5^{400}<0.5$$

על פי אי שוויון מרקוב $P(X>0.7)<\frac{E(X)}{0.7}<1$, אך בגלל שהמשתנה מקבל רק ערכים שלמים אז $X\le 0.7 \Longrightarrow X=0$, לכן יתכן שאין אף תת קבוצה מתאימה.

שאלה: הוכח שלא קיים משתנה X המקיים I. X מקבל חמישה ערכים שונים בהסתברות חיובית, II. $P(X=13)=\frac{1}{9}$, III. $E(X)=10$, IV. $V(X)=1$.

פתרון: יהי $\{a,b,c,d\}$ הערכים האחרים שהוא מקבל.

$$1=V(X)=P(X=a)\cdot(b-a)^2+P(X=b)\cdot(b-10)^2+P(X=c)\cdot(c-10)^2+$$
$$+P(X=d)\cdot(d-10)^2+\frac{1}{9}\cdot(13-10)^2>1 \Longrightarrow \text{סתירה}$$

שאלה: $X\sim P(1)$ חשב את $E(|X-1|)$.

פתרון:

$$E(|X-1|)=P(X=0)\cdot(+1)+\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot(k-1)=$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot(k-1)\right)+P(X=0)\cdot 2=\left(\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot k\right)-\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)+$$
$$+P(X=0)\cdot 2=E(X)-1+2\cdot P(X=0)=1-1+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}$$

[illegible]

שאלה: חברה מקיימת מידי יום הגרלה. בהגרלה משתתפים 70 איש שמשלמים כל אחד 100 ש"ח עבור השתתפותם. כל אחד מהמשתתפים מקבל כרטיס הגרלה שאותו מנפיקה מכונה. על הכרטיס מופיע צירוף של ארבעה מספרים שונים מבין $\{1,2,\dots,8\}$, כל צירוף בלתי תלוי באחרים. אחר כך החברה מגרילה ארבעה מספרים שונים מבין $\{1,2,\dots,8\}$, כך שלכל צירוף יש את אותה הסתברות. אם למשתתף יש את אותו צירוף, אז הוא זוכה בפרס, אם לכמה משתתפים יש את צירוף זה, אז הם מתחלקים בפרס. אם אין זוכה אז החברה לא משלמת את הפרס לאיש. הפרס הוא של 7,000 ש"ח.

א. מה הסכוי של משתתף לזכות בסכום כלשהו?

ב. בהנחה שלכל כרטיס לכל צירוף של מספרים יש את אותה הסתברות להופיע, מה הסכוי שהפרס לא יחולק? מהי תוחלת הרווח של החברה?

ג. נניח שכל צירוף שמשתתף מקבל מוצע על-ידי המכונה באופן אחיד מבין הצירופים שעליהם חלה לפחות אחת מהדרישות: I. מופיע המספר 4, II. מופיעים בדיוק שניים מבין המספרים $\{1,2,7,8\}$. מה הסכוי של משתתף לזכות בסכום כלשהו?

ד. תחת ההנחה של סעיף ג', מה הסכוי שהפרס לא יחולק? מהי תוחלת הרווח של החברה?

פתרון:

א. $\frac{1}{\binom{8}{4}}=\frac{1}{70}$

ב. $\left(1-\frac{1}{70}\right)^{70}=0.36\cong\frac{1}{e}$

$$E(X)=(1-0.36)\cdot 0+0.36\cdot 7,000=2,520$$

ג. עדין עבור כל משתתף המכונה תתן את הצירוף שיזכה בסכוי $\frac{1}{70}$.

ד. מספר הצירופים העונים על לפחות אחת מהדרישות הוא: $\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}=53$

(הסבר: או ש 4 נמצא ואז בכל מקרה לפחות אחד התנאים מתקיים או ש 4 אינו נמצא ובוחרים שניים מתוך $\{1,2,7,8\}$.)

אם החברה תגריל צירוף שאינו בין אלה, אז מובטח שאף אחד לא יזכה, אחרת אף אחד לא יזכה בסכוי $\left(\frac{52}{53}\right)^{70}$. לכן אף אחד לא יזכה בסכוי:

$$\frac{17}{70}\cdot 1+\frac{53}{70}\cdot\left(\frac{52}{53}\right)^{70}\cong 0.44$$

תוחלת הרווח של החברה היא: $0.44\cdot 7,000=3,080>2,520$

שלומי

שאלה: 3 שחקנים שווי יכולת a, b ו-c משתתפים בטורניר שחמט. תחילה משחקים a ו-b, המנצח נגד c וכו', המשחק מסתיים כאשר שחקן מנצח פעמיים ברציפות. מה הסיכוי של כל שחקן לנצח בתחרות כולה.

פתרון: לכל מאורע יש הסתברות $1\le m\le\infty$. במשחק שמספר שלביו לא תמם, לא תבוא הכרעה אם בכל שלב יתחלף המנצח. ההסתברות לכך קטנה מ- 0.5^{n-1} עבור כל n ולכן שווה לאפס. נדון בסכויים של השחקנים השונים לנצח בשלב כלשהו שבו עדיין לא הוכרעה התחרות. t-סכוי המנצח בסיבוב הקודם לנצח בתחרות כולה. r-סכוי המתמודד נגדו, v-סכוי זה שאינו מתמודד בשלב זה. בכל שלב או שיש הכרעה או שמתחלפים התפקידים.

$$\begin{cases} t = 0.5+0.5\cdot v \\ r = 0.5\cdot t \\ v = 0.5\cdot r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{7} \\ r = \frac{2}{7} \\ v = \frac{1}{7} \end{cases}$$

סכוי c בהתחלה הם r זאת מכיון שבכל מקרה הוא יתמודד במשחק השני. לכן סכוי a הם $\frac{1-\frac{2}{7}}{2}=\frac{5}{14}$.

שאלה: $X_1\sim G(0.1)$, $X_2\sim G(0.6)$; X_1,X_2 ב"ת ; נגדיר $X=\max\{X_1,X_2\}$.

א. עבור k טבעי מה הם:

$P(X_1\ge k)$, $P(X_2\ge k)$, $P(X\ge k)$,
$P(X_1\ge k+1|X_1\ge k)$, $P(X_2\ge k+1|X_2\ge k)$, $P(X\ge k+1|X_1\ge k, X_2<k)$,
$P(X\ge k+1|X_1<k, X_2\ge k)$, $P(X\ge k+1|X_1\ge k, X_2\ge k)$,
$P(X_1\ge 2, X_2<2|X\ge 2)$, $P(X_1<2, X_2\ge 2|X\ge 2)$,
$P(X_1\ge 2, X_2\ge 2|X\ge 2)$, $P(X\ge 3|X\ge 2)$

ב. מצאו את $\lim_{n\to\infty} P(X\ge n+1|X\ge n)$

ג. תנו הסבר לכך ש: $P(X\ge 101|X\ge 100) < P(X\ge 3|X\ge 2)$ (זאת תוצאה שעלולה להפתיע).

פתרון:

$P(X_1\ge k)=0.9^{k-1}$ $P(X_2\ge k)=0.4^{k-1}$ (בכל אחד מהמקרים נדרשים $k-1$ כשלונות)

$P(X\ge k)\overset{*}{=}0.9^{k-1}+0.4^{k-1}-(0.9\cdot 0.4)^{k-1}$

*) עבור כל זוג מאורעות A,B: $\left(P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$.

$$P(X_1\ge k+1|X_1\ge k)=\frac{0.9^k}{0.9^{k-1}}=0.9 \qquad P(X_2\ge k+1|X_2\ge k)=\frac{0.4^k}{0.4^{k-1}}=0.4$$

$$P(X\ge k+1|X_1\ge k, X_2\ge k)=0.9+0.4-0.9\cdot 0.4=0.94$$
$$P(X\ge k+1|X_1\ge k, X_2<k)=P(X_1\ge k+1|X_1\ge k)=0.9$$
$$P(X\ge k+1|X_1<k, X_2\ge k)=P(X_2\ge k+1|X_2\ge k)=0.4$$

המשך בעמוד הבא

$$p(X_1\geq 2, X_2<2 \mid X\geq 2)=\frac{0.9\cdot 0.6}{0.9+0.4-0.9\cdot 0.4}=\frac{54}{94}$$

$$p(X_1<2, X_2\geq 2 \mid X\geq 2)=\frac{0.1\cdot 0.4}{0.9+0.4-0.9\cdot 0.4}=\frac{4}{94}$$

$$p(X_1\geq 2, X_2\geq 2 \mid X\geq 2)=\frac{0.9\cdot 0.4}{0.9+0.4-0.9\cdot 0.4}=\frac{36}{94}$$

$$p(X\geq 3 \mid X\geq 2)=\frac{54}{94}\cdot 0.9+\frac{4}{94}\cdot 0.4+\frac{36}{94}(0.9+0.4-0.9\cdot 0.4)\cong 0.894<0.9$$

ד.

$$p(X\geq n+1 \mid X\geq n)=\frac{0.9^{n-1}(1-0.4^{n-1})}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}\cdot 0.9+$$

$$+\frac{(1-0.9^{n-1})\cdot 0.4^{n-1}}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}\cdot 0.4+\frac{0.36^{n-1}}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}\cdot(0.9+0.4-0.9\cdot 0.4)$$

מתקיים ש: $\frac{0.9^{n-1}(1-0.4^{n-1})}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}+\frac{(1-0.9^{n-1})\cdot 0.4^{n-1}}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}+\frac{0.36^{n-1}}{0.9^{n-1}+0.4^{n-1}-0.36^{n-1}}=1$

לכן עבור כל n יש כאן שקלול של שלושה קבועים 0.9, 0.4 ו-$0.9+0.4-0.9\cdot 0.4$.
כאשר n שואף לאינסוף הביטויים השני והשלישי שואפים לאפס לכן הגבול הוא 0.9.

ג. אם $X\geq 2$ יתכן ש-$X_2\geq 2$ ו-$X_1=1$ ואז יש סכוי גדול לכך ש-X לא יהיה גדול או שווה ל-3. כאשר מגדילים את n, בהינתן $X\geq n$, ההסתברות לכך ש-$X_1<n$ ו-$X_2\geq n$ שואפת לאפס. מדובר שבה משמעותי יותר מאשר העובדה שאם $X\geq 2$, אז יש סכוי גדול ש-$X_1\geq 2$ ו-$X_2\geq 2$, ואילו כאשר $n\geq X$ אין לכך סכוי גבוה.

שאלה: m נשים ו-n גברים התישבו בשורה. מה ההסתברות שלא תשבנה שתי נשים זו ליד זו? $(n\geq m-1)$.

פתרון:

$|\Omega|$ - מספר האפשרויות למצוא m מקומות לנשים: $|\Omega|=\binom{n+m}{m}$

A - n הגברים יוצרים $n+1$ מחיצות (כולל הקצוות). לכל מחיצה תכנס לכל היותר אישה אחת.

$$|A|=\binom{n+1}{m}\Longrightarrow p=\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n+m}{m}}$$

שלומי

שאלה: מבצעים סדרת נסיונות בה"ת שבכל אחד יש סכוי p להצלחה. יהי M מספר הנסיונות עד קבלת רצף של שתי הצלחות. חשב תוך שימוש בנוסחת התוחלת השלמה ונוסחת פירוק השונות את $E(M)$ ואת $V(M)$.

פתרון:
$$E(M)\overset{*}{=}(1-p)\cdot\left(E(M)+1\right)+p(1-p)\cdot\left(E(M)+2\right)+p^2\cdot 2$$

$$E(M)=E(M)+1-p\cdot E(M)-p+p\cdot E(M)+2p-p^2\cdot E(M)-2p^2+2p^2\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow E(M)=\frac{1+p}{p^2}$$

* על פי חלוקה למקרים: כשלון בפעם הראשונה, כשלון ראשון בפעם השניה ושתי הצלחות רצופות.

$$V(M)=V_y\left(E(M|y)\right)+E_y\left(V(M|y)\right)$$

$y=0$ אם הראשון כשלון, $y=1$ אם הראשון הצלחה והשני כשלון, $y=2$ אם שני הראשונים הצלחה.

$$V_y\left(E(M|y)\right)=(1-p)\cdot\left(\frac{1+p}{p^2}+1\right)^2+p\cdot(1-p)\cdot\left(\frac{1+p}{p^2}+2\right)^2+p^2\cdot 2^2-\left(\frac{1+p}{p^2}\right)^2$$

$$V(M)=(1-p)\cdot\left(\frac{1+p}{p^2}+1\right)^2+p(1-p)\cdot\left(\frac{1+p}{p^2}+2\right)^2+p^2\cdot 2^2-\left(\frac{1+p}{p^2}\right)^2+$$

$$+(1-p)\cdot V(M)+p(1-p)\cdot V(M)+p^2\cdot 0$$

וצריך לחלץ את $V(M)$.

הסבר: אם התקבל כשלון אז המקרה עם השונות המותנה זהה לשונות המשתנה המקורי M.

שאלה: $X_n\sim G\left(\frac{1}{n}\right)$ עבור $1\le n<\infty$.

א. הוכח שלא קיים גבול ל $(-1)^{E(X_n)}$ כאשר $n\to\infty$.

ב. חשב $\lim_{n\to\infty}E\left((-1)^{X_n}\right)$.

פתרון:

א. $E(X_n)=\frac{1}{1/n}=n$, לכן עבור n זוגי $(-1)^{E(X_n)}=1$ ועבור n אי זוגי $(-1)^{E(X_n)}=-1$, לכן יש שני גבולות חלקיים.

ב.
$$E\left((-1)^{X_n}\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k-1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k}\right)$$

עבור כל n הסכום של הכתוב בסוגריים הראשונים והשניים הוא 1 (הכוונה לשניהם ביחד), כאשר n שואף לאינסוף היחס ביניהם שואף ל 1, לכן
$$\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{X_n}\right)=0$$

שלומי

שאלה: לפני מעסיק מופיעות n מזכירות המעוניינות בתפקיד. המזכירות מדורגות כך שלכל אחת מ-$n!$ הפרמוטציות של הדרוג יש את אותה הסתברות. כשמגיעה אל המעסיק מזכירה הוא יודע רק דרגתה ביחס לקודמות לה, כך למשל אם הדרגות של המופיעות ראשונות הן 7,3,9,4 אז הוא יקבל סדרה 1,1,3,2. הוא יכול לבחור במזכירה המופיעה או לדחות אותה, אך אם ידחה אותה, הוא לא יוכל כבר לשכור אותה. מה צריכה להיות מדיניותו כדי למקסם את ההסתברות להעסיק את הטובה ביותר, כאשר מספר המזכירות גדול.

פתרון:

אתן פתרון, אך לא אוכיח בפרוט את כל הטענות.

טענה: אין טעם לשכור מזכירה שאינה הטובה ביותר עד כה, כי היא בודאי לא הטובה ביותר מבין כולן.

טענה: הכלל האופטימלי הוא מהצורה: בכל מקרה, אל תשכור את אחת מ-a המופיעות ראשונות עד איזשהו a, אחר כך תשכור מזכירה אם היא יותר טובה מכל הקודמות לה.

טענה: אם מזכירה היא הטובה ביותר מבין k מזכירות, אז הסכוי שהיא הכי טובה בכלל הוא $\frac{k}{n}$.

טענה: אם את a הראשונות לא שוכרים, אז הסכוי להגיע למזכירה ה-k מבלי שעד אז שכרנו הוא $\frac{a}{k-1}$ (מבין $k-1$ הראשונות הטובה ביותר היא בין a הראשונות).

טענה: אם הגענו למזכירה ה-k, הסכוי לבחור בה הוא $\frac{1}{k}$.

טענה: אם פועלים לפי כלל זה אז ההסתברות להצלחה היא:

$$\sum_{k=a+1}^{n} \frac{a}{k-1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{n} = \sum_{k=a+1}^{n} \frac{a}{(k-1)\cdot n}$$

טענה: עבור ה-a האופטימלי סכוי זה גדול שווה מ $\frac{a}{n}$, כי את ה-a בכל מקרה לא שקלנו לשכור, אך קטן שווה מ $\frac{a+1}{n}$ כי את ה $a+1$ היינו מוכנים לשכור אם היא היתה הטובה ביותר.

נקבל: $\frac{a}{n} \le \sum_{k=a+1}^{n} \frac{a}{(k-1)\cdot n} \le \frac{a+1}{n}$. כאשר n גדול נקבל:

$$\frac{a}{n} \approx \sum_{k=a+1}^{n} \frac{a}{(k-1)\cdot n} \Longrightarrow 1 = \sum_{k=a+1}^{n} \frac{1}{k+1} \Longrightarrow 1 = \ln(n) - \ln(a) \Longrightarrow a \approx \frac{n}{e}$$

והסכוי להצלחה הוא:

$$\sum_{k=\frac{n}{e}}^{n} \frac{\frac{n}{e}}{(k-1)\cdot n} = \frac{1}{e}\sum_{k=\frac{n}{e}}^{n} \frac{1}{k-1} \approx \frac{1}{e}\left(\ln(n) - \ln\left(\frac{n}{e}\right)\right) = \frac{1}{e}$$

זה הפתרון שלי. פתרון אלטרנטיבי של A.J.Bosch תוכלו למצוא ב
American Math Monthly V71 (1964) עמ' 329

שלומי.