הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 7

שלומי

שאלה 1

צפו בפתרון מוקלט כאן.

המשתנה X שסופר את מספר ההטלות יכול לקבל את הערכים 1,2,3.

מתקיים $P(X=1)=\frac{4}{6}$ (דרוש שבהטלה הראשונה נקבל תוצאה גדולה מ 2).

מתקיים $P(X=3)=\frac{1}{6^2}$ (רק רצף של שתי תוצאות 1 בהתחלה הוא מתאים).

מתקיים $P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$.

מתקיים $E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X=2)\cdot 2+P(X=3)\cdot 3$.

שאלה 2

צפו בפתרון מוקלט כאן.

הפתרון מתבסס על כך שתוחלת סכום הספרות שווה לסכום התוחלות של הספרות.

הספרה הראשונה מתפלגת $U[2,6]$ ולכן התוחלת שלה היא 4 .

כל אחת מהספרות האחרות מתפלגת $U[0,9]$ ולכן התוחלת שלה היא 4.5 .

תוחלת סכום הספרות היא $4+3\cdot 4.5$.

שאלה 3

צפו בפתרון מוקלט כאן.

א. משתנה בינומי סופר את מספר ההצלחות בסדרה של נסיונות ב"ת בעלי אותו סיכוי כל אחד. המשחקים בין בנות לבנים הם סדרת נסיונות ב"ת שווי הסתברות עבור הבנות. אבל לבנות יש גם $\binom{20}{2}$ משחקים שבין בנות לבנות שבהם תמיד יש בת מנצחת. נימוק קצר לכך שהמשתנה אינו בעל התפלגות בינומית הוא שהוא לא יכול לקבל ערך קטן מ $\binom{20}{2}$ בזמן שכל משתנה בינומי יכול גם לקבל את הערך 0 .

ב. המשתנה X הוא סכום של $20\cdot 10=200$ אינדיקטורים בעלי הסברות 0.5 כל אחד ושל קבוע של $\binom{20}{2}=190$ משחקים שבהם בודאי מנצחות בנות. לכן מתקיים $E(X)=190+200\cdot 0.5$.

הערה: מספר הנצחונות של בנות במשחקים נגד בנים מתפלג $Bin(200,0.5)$ וגם לפי זה תוחלתו היא $200\cdot 0.5$.

שאלה 4

צפו בפתרון מוקלט [כאן].

א. נניח שצובעים כל קשת בגרף בסיכוי של p בכחול ובסיכוי $1-p$ בירוק וזאת באופן ב"ת בצביעת הקשתות האחרות. בכל קבוצה של s צמתים כל $\binom{s}{2}$ הקשתות שבין צמתיה הן כחולות בסיכוי $p^{\binom{s}{2}}$. זו תוחלת האינדיקטור שכל הקשתות שבה הן כחולות. יש $\binom{n}{s}$ אינדיקטורים כאלה, כמספר תתי הקבוצות בגודל s. מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות אז תוחלת מספר הקליקות הכחולות הוא $\binom{n}{s}p^{\binom{s}{2}}$. באופן דומה תוחלת מספר הקליקות הירוקות בנות t צמתים היא $\binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}$. התוחלת של המספר הכולל של קליקות כחולות בנות s צמתים וירוקות בנות t צמתים היא קטנה מ 1. מספר הקליקות יכול להיות רק מספר שלם. כדי שלמשתנה תהיה תוחלת קטנה מ 1 לא יתכן שהוא יקבל רק ערכים גדולים או שווים ל 1. לכן הוא מקבל בהסתברות חיובית את הערך אפס. לכן אם נבצע צביעה כמתואר יתכן שלא נקבל אף קליק מהסוגים המתוארים. לכן קיימת צביעה שבה אין אף קליק מהסוגים המתוארים.

ב. נגריל צביעה דומה על גרף בעל $n+1$ צמתים. תוחלת מספר הקליקות משני הסוגים יהיה קטן מ 2. לכן קיימת צביעה שבמסגרתה אין יותר מקליק אחד. אם יש צביעה שבה אין בכלל קליקים אז גם בגרף השלם שבו n צמתים יש צביעה ללא קליק. אם יש צביעה שבה יש קליק אחד, אז נסיר את אחד מצמתי קליק זה. כעת אין בכלל קליקים בגרף שנותר שבו n צמתים. לכן בגרף השלם שבו n צמתים יש צביעה ללא קליקים מהסוג המתואר.

[שלומי]