אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

(54)

מועד א' סמסטר א' תשמ"ו
11.2.86

פונקציות ממשיות

לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג

המורה: פרופ' מ. סמורודינסקי

משך הבחינה: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות.

שאלה 1

א. $f_n(x)$ סידרת פונקציות אינטגרבילית.
הוכח שאם $f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית אז:

$$\int_R \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\,dx \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_R f_n(x)\,dx .$$

ב. תן דוגמא לסידרת פונקציות $f_n(x)$ אינטגרביליות וכך ש-

$$\int_R \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\,dx < \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_R f_n(x)\,dx$$

שאלה 2

א. $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $[a,b]$ הוכח $\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b)-f(a)$

ב. $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $[a,b]$ וקיים $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$

הוכח ש- $f(x)$ רציפה בהחלט.

שאלה 3

תהי E קבוצה מדידה וחסומה. יהי $\delta>0$. תהי $A\subset E$ קבוצת נקודות כך שעבור כל $x\in A$

$$\underline{\lim_{h\to 0}} \frac{m([x-h,x+h]\cap E)}{2h} \leq 1-\delta$$

נסח והוכח טענה לגבי $m^*(A)$,

שאלה 4 :

$f(x)$ פונקציה מדידה בקטע $[0,1]$ ועבור כל $x\in[0,1]$ קיים $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 1$

הוכח: $f(1)-f(0)\geq 1$

(נסח את המשפטים עליהם אתה מסתמך).

שאלה 5

$0<\alpha\leq 1$ ו- A קבוצה מדידה בקטע $[0,1]$ אם עבור אל אינטרוואל $I\subset[0,1]$ כ- מתקיים

$$\frac{m(A\cap I)}{m(I)}\geq\alpha$$

הוכח $m(A)=1$

שאלה 6

הוכח: תנאי הכרחי ומספיק ש- $f(x)$ המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא בעלת השתנות חסומה הוא שקיימת פונקציה $\varphi(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[a,b]$ ועבור כל $x_1<x_2$ מתקיים

$$f(x_2)-f(x_1)\leq\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$

בהצלחה!!!

1

קיימת קבוצה A מדידה כך שעבור כל $x \in A$ ועבור כל $\varepsilon > 0$ הקטע $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ מכיל תת קטע שאיננו שייך ל- A ו- $m(A) > 0$

2

A קבוצה מדידה בקטע $[0,1]$ כך שהקבוצות $A_n = A + \frac{\sqrt{2}}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ זרות $\Leftarrow$ $m(A) = 0$

3

קיימות קבוצות (לא בהכרח מדידות) A ו- B וקבוצות C ו- D פתוחות כך ש- $C \cap D = \emptyset$ ו- $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$

4

הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$

5

קיימת סידרת פונקציות חיוביות ומדידות $f_n(x)$ המוגדרות בקטע $[0,1]$ כך ש-

$$\lim \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \quad ! \quad \int_0^1 \underline{\lim}\, f_n(x)\,dx = 0$$

6

קיימות A ו- B קבוצות זרות כך ש- $m_*(A \cup B) < m_*(A) + m_*(B)$

7

$f(x)$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה $\Leftarrow$ קבוצת הנקודות בהן לא קיימת הנגזרת של $f(x)$ היא בת מניה.

8

את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x \text{ רציונלי } x=p/q \quad (p,q)=1 \\ 0 & \text{אי רציונלי} \end{cases}$$

אי אפשר להציג כהפרש של שתי פונקציות מונוטוניות עולות.

9

קיימת פונקציה $f(x)$ כך שעבור כל קבוצה פתוחה G, $[f \in G] = \{x \mid f(x) \in G\}$ היא קבוצה מדידה אבל $f(x)$ איננה מדידה.

10

קיימת סידרת פונקציות $f_n(x)$ מדידות $0 \le x \le 1$ כך ש- $f_n(x) \to f(x)$ עבור כל x אבל עבור כל קבוצה A, $m(A)=0$ אין התכנסות במידה שווה על A^c.

11

קיימת סידרת פונקציות $f_n(x)$ המוגדרות בתחום $0 \le x < \infty$ כך ש- $f_n(x) \to f(x)$ בכל מקום אבל עבור כל תת סידרה $\{n_k\}$ אין התכנסות לפי מידה של $f_{n_k} \xrightarrow{m} f(x)$

12

קיימת פונקציה מדידה $f(x)$ המוגדרת עבור $-\infty < x < \infty$ ולא אינטגרבילית כך שסידרת הפונקציות

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & -N \le x \le N \\ & -N \le f(x) \le N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad N=1,2,\dots$$

מקיימת: $\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\,dx$ קיים וסופי.

13

$f(x)$ פונקציה רציפה בהחלט בתחום $0 \le x \le 1$, $f(0)=0$ ו- $f'(x)=1$ כמעט בכל מקום $\Leftarrow$ $f(x) \equiv x$

(59)

ת/וו 14

קיימת קבוצה A בקטע $[0,1]$ כך ש- $m(A)=1$ וכך שעל קבוצה __איבסופית__ חלקית ל- A . צפיפות לבג תחתונה קטנה ממש מ-1.

15

קיימת פונקציה $f(x)$ בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ כך שעבור כל $\delta>0$ קיימת חלוקה $\pi: x_0=0<x_1 \cdots <x_n=1$ עם נורמת חלוקה קטנה מ- δ (כלומר $x_i-x_{i-1}<\delta$ $i=1,\dots,n$)
ו-

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f - \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \geq 1$$

16

קיימת פונקציה לא מדידה $f(x)$ $0\le x\le 1$ כך ש- $\underline{D} f(x)\geq 0$ (מספר נגזר תחתון) עבור כל x בקטע.

17

נתונה הפונקציה

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad \int_0^1 x\, dF(x) = \frac{5}{8}$$

בהצלחה!!!

60

חלק ב': (25 נקודות)

ענה על אחת משתי השאלות הבאות. נסח במדויק משפטים או משפטי עזר בהם אתה משתמש.

שאלה 1

א. הגדר מהי קבוצה אפסית.

ב. הוכח שאם $f(x)$; $0\le x\le 1$ פונקציה חסומה ונקודות אי הרציפות שלה מהוות קבוצה אפסית אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$

שאלה 2

תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(x)dx$

נסח והוכח משפט המקשר בין $F(x)$ ו- $f(x)$.

בהצלחה!!!!

<u>חלק א'</u>

שאלה 1

קיימת קבוצה A (כלשהי) בקטע $[0,1]$ וקיים מספר ממשי $0 \leq \alpha < 1$
כך שעבור כל אינטרוול J מתקיים
$$m^*(A \cap J) < \alpha \cdot m(J)$$
ו- $m^*(A) > 0$

שאלה 2

קיימת פונקציה רציפה במידה שווה בקטע פתוח אבל לא רציפה בהחלט שם.

שאלה 3

קיימת פונקציה לא מדידה $f(x)$ בקטע $[0,1]$ ו- M מספר ממשי כך ש- $D_- f(x) > M$
(מספר נגזר תחתון) עבור כל x.

שאלה 4

אם ל- A קיים כסוי ויטלי אז A מדידה.

שאלה 5

הפונקציה $F(x)$ מוגדרת באופן הבא
$$F(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
אז
$$\int_0^1 x \, dF(x) = -\frac{1}{8}$$

<u>שאלה 6</u>

אם $f(x)$ פונקציה מוגדרת גזירה בכל נקודות הקטע $[0,1]$ אז נגזרתה $f'(x)$ אינטגרבילית שם

שאלה 7

$f_n(x)$ סידרת פונקציות מוגדרות ואינטגרביליות בקטע $[0,1]$ וכך
ש- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אינטגרבילית שם אז
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

3/..

63

שאלה 8

קיימות קבוצות לא מדידות A ו- B כך ש- $A \subset C$ ו- $B \subset D$

C ו- D מדידות וזרות ומתקיים

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

שאלה 9

את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לא ניתן להציג כהפרש שתי פונקציות מונוטוניות.

שאלה 10

קיימת פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע $[0,1]$ ו- $f(0)=0$ ו- $f'(x)=1$

כמעט בכל מקום אבל

$$f(x) \not\equiv x$$

שאלה 11

א. A קבוצת כל הנקודות בקטע $[0,1]$ כך שבפיתוח לפי בסיס 3 לא מופיעה הספרה "1".

ב. B קבוצת כל הנקודות בקטע $[0,1]$ כך שבפיתוח לפי בסיס "9" לא מופיעה הספרה "1"

$$\Leftarrow \qquad m(A) = m(B)$$

שאלה 12

$f(x)$ רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$ אז ניתן להציג אותה כהפרש שתי פונקציות מונוטוניות.

חלק ב': (50 נקודות)

ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות. נסח במדויק משפטים או משפטי עזר בהם אתה משתמש.

שאלה 1

א. נסח את הלמה של הינה-בורל.

ב. הוכח שאם $\{I_n\}$ $n=1,2,\dots$ סידרת אינטרוולים פתוחים
כך ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset (0;1)$, $I_n=(a_n,b_n)$
אז
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) \geq 1$$
(אין להסתמך על התת אדיטיביות של מידת לבג)

שאלה 2

נסח והוכח את הלמה של פטו (Fatou)

שאלה 3

הוכח שאם $f(x)$ מוגדרת ורציפה בהחלט בקטע $[0,1]$ וכך ש- $f'(x)=0$
כמעט בכל מקום אז $f(x)\equiv C$ בכל מקום.

בהצלחה!!!