מועד א' סמסטר קייץ תשנ"ט 4.10.99

פונקציות ממשיות

המורה ד"ר י. אידלמן

משך הבחינה 3.5 שעות

אין להשתמש בשום חומר עזר

צטט/י במדוייק את כל המשפטים בהם את/ה משתמש/ת

<u>שאלה 1 (30 נקודות).</u>

ענה על שתי השאלות 1) ו 2)

1) תהי $m$ מדה ממשית המוגדרת באלגברה $R$ של תת קבוצות של קבוצה $X$. ויהי $\mathfrak{M}$ אוסף תת הקבוצות $A$ של $X$ המקיימות:

$$\forall(\varepsilon>0)\exists(B\in R)[\mu^*(A\Delta B)<\varepsilon]$$

כאשר $\mu^*$ היא המדה החיצונית המתאימה ל-$m$.

תהיה $\mu$ צמצום $\mu^*$ ל $\mathfrak{M}$.

ענה על <u>אחת בלבד</u> משתי השאלות הבאות. במדה ותבחר לענות על שאלה ב. תוכל להניח את נכונות הטענות שבשאלה א.;

א. הוכח כי $\mathfrak{M}$ היא אלגברה וכי $\mu$ אדיטיבית ב-$\mathfrak{M}$.

ב. הוכח כי $\mu^*$ $\sigma$-אדיטיבית למחצה וכי $\mathfrak{M}$ היא $\sigma$-אלגברה ו $\mu$ $\sigma$-אדיטיבית ב-$\mathfrak{M}$

2) יהיה $S=\{[a,b],(a,b],[a,b),(a,b)\}$ הוא חוג למחצה בתוך קטע $[0,1]$. יהיה $f(x)$ פונקציה רציפה לא יורדת ב $[0,1]$. נגדיר ב $S$ פונקצי"ת קבוצות $\mu_f(A_{ab})=f(b)-f(a)$.
הראה כי $\mu_f$ הוא מדה.

## שאלה 2 (25 נקודות)

ענה על 1 מתוך 2 שאלות

1) הוכח משפט לבג: תהיה סדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ פונקציות מדידות סופיות $\mu$-כ.כ.מ. מתכנסות לפונקציה $f$, $\mu$ מדה סופית. אז $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
האם משפט הזה נכון במקרה של מדה $\sigma$-סופית (הוכח או תן דוגמה נגדית)

2) תהיה $f$ פונקציה עולה וסופית בקטע $[a,b]$.
הראה כי $f$ מדידה, גזירה כ.כ.מ., נגדיר $f'$ פונקציה מדידה ומקיימת לכאי שוויון

$$\int_a^b f'dx \le f(b)-f(a)$$

האם במקרה של פונקציה $f$ רציפה מתקיים

$$\int_a^b f'dx = f(b)-f(a)$$

(הוכח או תן דוגמה נגדית).

## שאלה 3 (25 נקודות)

ענה על 3 מתוך 4 שאלות

1) תהיה $m$ מדה סופית במערכת האלגברה $R$ של תת-קבוצות של קבוצה $X$, $\mu^*$ מדה חיצונית המתאימה ל $m$. הוכח כי קבוצה $A\subset X$ מדידה אם ורק אם עבור כל $Z\subset X$ מתקיים

$$\mu^*(Z)=\mu^*(Z\cap A)+\mu^*(Z\setminus A)$$

2) תהיה $f$ מדידה וסופית כמעט בכל מקום ב $[a,b]$. הוכח כי קיימת סדרת פונקציות רציפות $\{f_n\}$ המוגדרת בקטע $[a,b]$ כך ש $f_n\to f$ כ.כ.מ.

3) תהי $f$ פונקציה ממשית המוגדרת בריבוע $T: 0\le x,y\le 1$ ומקיימת את התנאים הבאים: א) לכל $x\in[0,1]$ פונקציה $f(x,y)$ אינטגרבילית לפי לבג בקטע $[0,1]$; ב) $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת לכל $(x,y)\in T$ וקיים $M>0$ כך ש $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\le M$ עבור כל $(x,y)\in T$.
הוכח כי לכל $x$ פונקציה $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ אינטגרבילית לפי $y$ בקטע $[0,1]$ ו

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$$

4) תהי $f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ופונקציה $g$ מוגדרת ב $[a,b]$ ע"י $g(x)=\int_a^x f\,dt$.
הוכח כי $g$ רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$.

שאלה 4 (20 נקודות)

ענה על 2 מתוך 3 שאלות.

1) תהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה עם מידת לבג סופית וחיובית. הוכח כי

$$\forall(\alpha\in(0,1))\,\exists([a,b])[\,\mu(A\cap[a,b])\geq\alpha\,\mu(A)]$$

2) תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות המקיימות לתנאים: $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leq f_{n+1}\leq f_n$ ; $f_n\xrightarrow{\mu}0$.
הוכח כי $f_n\to 0\ (\mathrm{mod}\ \mu)$

3) תהי $f$ אינטגרבילית לפי לבג על $\mathbb{R}$. נגדיר

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos tx\,dx$$

הוכח כי $\hat{f}$ רציפה על $\mathbb{R}$.

בהצלחה!

3

מועד ב' סמסטר קיץ תשנ"ט 12.11.99

פונקציות ממשיות

המורה ד"ר י. אידלמן

משך הבחינה 3.5 שעות

אין להשתמש בשום חומר עזר

הסבר/י במדוייק את כל המשפטים בהם את/ה משתמש/ת

## שאלה 1 (30 נקודות)

ענה על 1 מתוך 2 שאלות

1) א) הוכח כי אם $\mu$ מדה $\sigma$-אדיטיבית סופית על חוג $R$ ו $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in R$ סדרת קבוצות מונוטונית, $A=\lim_{n\to\infty} A_n \in R$ אז $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

ב) הוכח כי שלושת הטענות הבאות שקולות בחוג $R$ עם פונקציית קבוצות $\mu$ אדיטיבית סופית:

a) אם $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_i\cap A_j=\Phi$, $A,A_k\in R$ אז $\mu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$

b) אם $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$, $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, $A,A_k\in R$ אז $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$

c) אם $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$, $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$, $A,A_k\in R$ אז $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$

האם זה נכון עבור חוג למידה כללית או רק למידה סופית?

ג) יהיה $X=[a,b]$ קטע על הישר, $S$ חוג למידה

שכל הקטעים המוכלים של [u,ט] מהצורה

$A_{ab}=\{[a,b],(a,b],[a,b),(a,b)\}$.

עבור קבוצות מ $S$ מגדירים פונקציית קבוצות $m$
ע"י $m(A_{ab})=b-a$.
הוכח כי $m$ מדה $\sigma$-אדטיבית.

2) א) נסח והוכח משפט לוזין

ב) תהיה $f$ פונקציה מדידה וסופית כמעט בכל
מקום ב קטע $[a,b]$. הוכח כי קיימת סדרת פונקציות
רציפות $\{f_n\}$ המוגדרת בקטע $[a,b]$ כך ש
$f_n \to f$ כ.כ.מ.

שאלה 2 (25 נקודות)

ענה על 1 מתוך 2 שאלות

1) א) נסח והוכח משפט לבג על התכנסות דומיננטית במקרה של מידה סופית

ב) האם משפט לבג נכון במקרה של מידה $\sigma$-סופית (הוכח או תן דוגמה נגדית)?

2) א) נסח והוכח משפט פוביני

ב) תהיה $f(x,y)$ פונקציה מדידה ב $Y\times X$. האם קיימות ושוויון אינטגרלים חוזרים

$$\int_X\left(\int_{A_x} f\,d\mu_y\right)d\mu_x=\int_Y\left(\int_{A_y} f\,d\mu_x\right)d\mu_y$$

גורר אינטגרביליות של $f(x,y)$ (הוכח או תן דוגמה נגדית)?

ג) האם קיימות של אינטגרל חוזר

$$\int_X\left(\int_{A_x}|f|\,d\mu_y\right)d\mu_x$$

גורר אינטגרביליות של $f(x,y)$ (הוכח או תן דוגמה נגדית)?

## שאלה 3 (25 נקודות)

ענה על 3 מתוך 4 שאלות

1) יהיה $E$ קבוצה, $S'$ חוג למחצה קבוצות חלקיות של $E$ הכולל את $E$ עם מדה $m$, $R(S')$ חוג הנוצר ע"י $S'$ עם מדה $m'$. נגדיר מדה חיצונית ע"י

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_n m'(A_n) : A\subset\bigcup_n A_n,\ A_n\in R(S')\right\}$$

הראה כי הגדרה הנ"ל שקולה ל

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_n m(B_n) : A\subset\bigcup_n B_n,\ B_n\in S'\right\}$$

2) א) בנה בקטע $[0,1]$ קבוצה פרפקטית דלילה עם מדה נתונה $a$ $(0\le a<1)$;

ב) האם אפשר לבנות בקטע $[0,1]$ קבוצה פרפקטית דלילה עם מדה $1$?

3) תהי $E$ קבוצה חסומה על הישר המכוסה ע"י מערכת הקטעים $M$ במובן של ויטלי. הראה כי עבור כל $\varepsilon>0$ קיימת מערכת סופית $d_1,d_2,\dots,d_n$ קטעים זרים מ $M$ עבורה $\mu^*\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}d_k\right)<\varepsilon$.

4) נניח כי בקבוצה מדידה $E$ $f_n\xrightarrow{\mu}f$, קיימת פונקציה $g$ אינטגרבילית עבורה $|f_n|\le g$.

הוכח כי $\|f-f_n\|_1\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

## שאלה 4 (20 נקודות)

ענה על 2 מתוך 3 שאלות

1) הוכח כי אם עבור סדרת פונקציות מדידות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ופונקציה מדידה $f$ עבור כל $\varepsilon>0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{|f_n-f|>\varepsilon\})<\infty$ אז $f_n\to f \pmod{\mu}$.

2) יהיה $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות ב $[0,1]$ עבורה

$$\int_0^1 |f_n|^2\,dx\le 1$$

ו $f_n\to 0$ כ.ב.מ. ב $[0,1]$.

הוכח כי

$$\int_0^1 |f_n|\,dx\to 0.$$

3) תהי $f$ אינטגרבילית לפי לבג על $\mathbb{R}$. נגדיר

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx\,dx$$

הוכח כי $\hat{f}$ רציפה על $\mathbb{R}$.

בהצלחה!

דן עמיר

31.8.98

# המבחן בפונקציות ממשיות, מועד ב

משך הבחינה: שלוש שעות, חומר סגור!

ענה על שש משמונה השאלות הבאות (כל שאלה 17 נקודות)

1) אם $(f_n)$ סדרת פונקציות מדידות על הישר $\mathbb{R}$, אז קבוצת הנקודות $t \in \mathbb{R}$ כך ש $(f_n(t))$ אינה סדרת קושי, היא קבוצה מדידה.

2) אם $f_n \ge 0$ אינטגרביליות וגם $\int f_n dm \to 0$, אז $f_n \to 0$ במידה. האם זה גורר $f_n \to 0$ כ.ת.? האם זה נכון ללא התנאי $f_n \ge 0$?

3) אם $g_k, g$ אינטגרביליות, $E, E_k$ מדידות וגם $g_k \to g$ בממוצע (בנורמת 1) ו $m(E_k \Delta E) \to 0$ ($\Delta$ - ההפרש הסימטרי), אז $\int_{E_k} g_k \to \int_E g$.

4) $f$ מדידה על $E$ בעלת מידה סופית היא אינטגרבילית על $E$ אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} m\{t; |f(t)| \ge n\} < \infty$. האם ניתן להתחיל את הסכום ב $n=0$? מה קורה כאשר $mE=\infty$?

5) תן דוגמה לסדרת קבוצות $(E_n)$ בישר כך ש $E_n \supset E_{n+1}$ ו $m^*E_n < \infty$ לכל $n$, אבל $\lim_n m^*E_n \neq m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$. האם תתכן דוגמה כזו כש $E_n$ מדידות?

6) אם $f, f_n \in L^p$, $(1 \le p < \infty)$, $g, g_n$ מדידות כך ש $f_n \to f$ ב $L^p$ ו $g_n \to g$ כ.ת., וגם $|g_n| \le M$ לכל $n$, הראה כי $f_n g_n \to fg$ ב $L^p$.

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. האם $f$ רימן אינטגרבילית ב $(0,1]$? האם היא חסומה, מדידה ב $(0,1]$? האם היא אינטגרבילית (לבג) על $[0,1]$? האם קיים $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(t)dt$?

8) בדוק את התכנסות הסדרה $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ על $[0,1]$ במובנים השונים של התכנסות המוכרים לך (נמק).

הצלחה

0366.3106


אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים


סמסטר ב מועד ב, תשנ״ה.
28 August 1995

בחינה בפונקציות ממשיות.
-לתלמידי המתמטיקה שנים ב,ג. המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה 3.5 שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו. ענה על 4 מבין השאלות הבאות.

**שאלה 1.**

א. תהי f אינטגרבילית על $[a,b]$ וכך שלכל x קיים: $\int_a^x f(t)dt = 0$. הראה כי $f(x)=0$ כ.ב.מ..

ב. תהי $f:[-1,1]^2 \to R$ המוגדרת ע״י: $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ אם $x^2+y^2 \neq 0$, ו- $f(0,0)=0$.

האם f אינטגרבילית?

**שאלה 2.**

א. תהי $A \subset R^n$. הוכח כי אם עבור כל $E \subset R^n$, מתקיים $m_e(E) = m_e(E \cap A) + m_e(E \cap A^c)$, אזי A מדידה.

ב. הראה כי הפונקציה $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ אם $x \in (0,1]$ ו $f(0)=0$, רציפה בהחלט על $[0,1]$.

**שאלה 3.**

א. תהי $A \subset R^{n+m}$ מדידה ותהי $A_x = \{ y : (x,y) \in A \}$. הראה כי כמעט לכל $x \in R^n$, הקבוצה $A_x$ מדידה.

ב. תהי $A \subset R^n$ מדידה ו $f:A \to R$ פונקציה שלה התכונה: לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $F \subset A$ סגורה כך ש $m(A-F) < \varepsilon$, וכך ש- f רציפה יחסית ל F. הראה כי f מדידה.

**שאלה 4.**

הוכח כי $L^2[a,b]$ הוא שלם.

**שאלה 5.**

א. תהי f גזירה על $[a,b]$ וכך ש-$f'$ חסומה. הראה כי $f'$ מדידה ושלכל $x \in [a,b]$ קיים $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

ב. תהי f פונקציה רציפה ועולה על $[a,b]$. הראה כי f רציפה בהחלט על $[a,b]$, אם ורק אם $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

**שאלה 6.**

תהי $(f_n)$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת כ.ב.מ. לפונקציה f. נניח כי קיימת סדרה $(g_n)$, של פונקציות אינטגרביליות, המתכנסת כ.ב.מ. לפונקציה אינטגרבילית g, כך ש: לכל n $|f_n| \le g_n$, ו- $\int g_n \to \int g$. הוכח כי:

א. $\int f_n \to \int f$; ב. $\int |f_n - f| \to 0$.

בהצלחה!!!

סמסטר קיץ מועד א' תשנ"ח

16.9.98

בחינה בתורת הפונקציות הממשיות

המורה: ד"ר תמר דורק.

משך הבחינה $3\frac{1}{2}$ שעות.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות:

I. ענה על <u>שתי</u> השאלות 1) ו 2).

1) ענה על <u>אחת</u> בלבד מבין השאלות א' וב'.

א. תהי $m$ מדה ממשית המוגדרת באלגברה $\mathcal{A}$ של תת קבוצות של קבוצה $X$. תהי $\mu^*$ המדה החיצונית המתאימה ל-$m$. תהי $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ אלגברת הקבוצות הנתונות ע"י $\mathcal{L}(\mathcal{A})=\{E;\ E\subset X,\ \mu^*(E)+\mu^*(X-E)=m(X)\}$.
הראה כי $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ הינו $\sigma$ אלגברה.

ב. תהי $\mu$ המדה המתקבלת כהרחבת לבג של מדה ממשית, טופולוגית, $m$, המוגדרת בתחום $R$, למדה המוגדרת כ-$\sigma$ אלגברה. במקרה זה $R$ הוא החוג הנוצר ע"י החוג למחצה של האינטרוולים $I$, מצורה $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,b)$ עם $a\le b$ החלקיים לישר הממשי וכאשר לכל $I$ כנ"ל $m(I)=b-a$.
תהי $E$ קבוצה מדידה ונניח כי $\mu(E)<\infty$. הראה כי
$$\mu(E)=\inf\{\mu(U);\ U \text{ פתוחה } E\subset U\}$$

2) תהי $\mu$ מדת לבג על הישר ותהי $f$ פונקציה אינטגרבילית על הישר. לכל $t$ ממשי תהי $f_t$ הפונקציה המוגדרת ע"י: $f_t(x)=f(x+t)$.

הראה כי מתקיימות <u>שתי</u> הטענות הבאות

א. לכל $t$ ממשי $f_t$ מדידה ואינטגרבילית. תהי $A$ קבוצה מדידה אזי $\int_A f_t\,d\mu=\int_{A_t} f\,d\mu$ כאשר $A_t=\{y;\ y=x+t\ \ x\in A\}$.

ב. $\lim_{t\to 0}\int_{(-\infty,\infty)}|f_t-f|\,d\mu=0$

## II ענה על שתי השאלות 1) ו 2)

1) הוכח את המשפט הבא (משפט אגורוב):
יהי $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מדה ונניח כי $\mu(X)<\infty$. תהי $f_n$, $n=1,2,\ldots$ סדרת פונקציות מדידות וסופיות כ.ב.מ. ב $X$. תהי $f$ מדידה וסופית כ.ב.מ. ב $X$. נניח כי $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ [כ.ב.מ.]. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה מדידה $E$ כך ש $\mu(X-E)<\varepsilon$ וכך שהסדרה $f_n$, $n=1,2,\ldots$ מתכנסת ל $f$ במדה שוה ב $E$.

2) יהי $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מדה. תהי $f_n$, $n=1,2,\ldots$ סדרת פונקציות אינטגרביליות. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu<\infty$.

הראה כי מתקיימות הטענות הבאות:

א. תהי $\varphi$ הפונקציה הממשית המורחבת המוגדרת ע"י $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$, אזי $\varphi$ אינטגרבילית ו $\varphi$ סופית כ.ב.מ.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כ.ב.מ.

ג. תהי $f$ הפונקציה כך ש $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ בנקודות ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ו $f(x)=0$ אחרת. אזי $f$ אינטגרבילית ו $\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

## III ענה על שתי השאלות 1) ו 2)

1) יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מדה. תהי $f_n$, $n=1,2,\ldots$ סדרת פונקציות אינטגרביליות. נניח כי הסדרה $f_n$, $n=1,2,\ldots$ היא סדרת קושי במדה. תהי $\nu_n$ המדה המוגדרת ב $\mathcal{A}$ ע"י $\nu_n(E)=\int_E |f_n|\,d\mu$. נניח כי סדרת המדות $\nu_n$ רציפה במדה אחידה ב $\phi$.
הראה כי הסדרה $f_n$, $n=1,2,\ldots$ היא סדרת קושי בממוצע.
תן דוגמה לסדרת פונקציות אינטגרביליות המתכנסת במדה אך לא בממוצע לפונקציה אינטגרבילית.

2) ענה על אחת בלבד מבין שתי השאלות הבאות:

א. הוכח את הלמה של בורל-קנטלי: יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מדה. תהי $E_n$, $n=1,2,\ldots$ סדרת קבוצות מדידות ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$. אזי $\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right)=0$.

ב. תהי $\mu$ מדת לבג על הישר. תהי $f$ פונקציה המוגדרת ורציפה בהחלט בקטע $[a,b]$. תהי $E\subset(a,b)$ ונניח כי $E$ מדידה וכי $\mu(E)=0$. תהי $f(E)$ תמונת $E$ ע"י $f$ $\left(f(E)=\{y\ ;\ y=f(x)\quad x\in E\}\right)$. הראה כי $f(E)$ מדידה וכי $\mu(f(E))=0$.

IV ענה על **שתי** השאלות 1) ו-2).

1) תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית לפי מידת לבג בקטע $[a,b]$. ונניח כי $f$ רציפה ב-$[a,b]$.
תהי $F$ הפונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ע"י $F(x)=\int_{[a,x]} f\,d\mu$.
הראה כי $F$ גזירה כ.ב.מ. וכי $F'(x)=f(x)$ כ.ב.מ.

2) תהי $F$ פונקציה מונוטונית עולה ורציפה בהחלט בקטע $[a,b]$.
תהי $m_F$ המידה שתחום הגדרתה הוא החוג $R$ הנוצר ע"י החוג למחצה של האינטרוולים $I$ מהצורה $(\alpha,\beta)$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$ או $[\alpha,\beta]$ עם $\alpha\leq\beta$ והחלקיים ל-$[a,b]$ וכך שלכל $I$ כנ"ל מתקיים: $m_F(I)=F(b)-F(a)$
תהי $\mu_F$ מידת סטילטיס לבג המתאימה ל-$F$ ושהיא הרחבת לבג של $m_F$: ויהי $\mathcal{L}_F$ תחום הגדרת $\mu_F$
תהי $\mu_F^*$ המידה החיצונית המתאימה ל-$m_F$.
תהי $\mu$ מידת לבג בקטע $[a,b]$ ויהי $\mathcal{L}$ תחום ההגדרה של $\mu$.
תהי $\sigma$ המידה שתחום הגדרתה $\mathcal{L}$ וכך שלכל $A\in\mathcal{L}$ מתקיים $\sigma(A)=\int_A F'\,d\mu$
(כאשר $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ אם $F$ גזירה ב-$x$ ו-$F'(x)=0$ אחרת)
הראה כי מתקיימות שלושת הטענות הבאות:

א. לכל $A\in R$ מתקיים: $m_F(A)=\sigma(A)$. תהי $O$ קבוצה פתוחה חלקית ל-$[a,b]$ אזי $O\in\mathcal{L}_F$ ומתקיים: $\mu_F(O)=\sigma(O)$

ב. לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-$\mu_F^*(A)<\varepsilon$ בתנאי ש-$A\in\mathcal{L}$ ו-$\mu(A)<\delta$.

ג. $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_F$ ולכל $A\in\mathcal{L}$ מתקיימת הטענה $\mu_F(A)=\sigma(A)$.
(כלומר לכל קבוצה $A$ חלקית ל-$[a,b]$ שהיא מדידה לבג $A$ שייכת לתחום ההגדרה של $\mu_F$ ומתקיימת הטענה $\mu_F(A)=\int_A F'\,d\mu$)

למתמטיקה

בחינה בפונקציות ממשיות, 18.2.98 המורה: דן עמיר

משך הבחינה: שלוש שעות.

חלק א. ענה על שלוש מארבע השאלות (כל שאלה 35 נקודות).

1) א. הגדר מדידות של קבוצה ב-R ושל פונקציה ממשית,

ב. נסח את שלושת העקרונות של ליטלווד.

ג. הוכח את משפט אגורוב. (הגדר סדרת פונקציות מדידות ($f_n$) על קבוצה $E$ בעלת מידה סופית).

ד. תן דוגמה המראה כי משפט אגורוב אינו נכון כאשר $mE=\infty$.

2) א. הגדר את האינטגרל של פונקציה פשוטה, של פונקציה חיובית ושל פונקציה מדידה.

ב. נסח את המשפטים הידועים לך בדבר החלפת גבול ואינטגרל.

ג. הוכח את משפט ההתכנסות המונוטונית או את משפט ההתכנסות הנשלטת בעזרת הלמה של פטו.

ד. תן דוגמה ל- $\lim\int f_n \neq \int \lim f_n$ והשווה למשפטים שנסחת.

3) א. הגדר רציפות בהחלט והשתנות חסומה של פונקציה ממשית על קטע,

ב. הוכח שפונקציה לא יורדת על $[a,b]$ גזירה שם כמעט תמיד.

(אין צורך להוכיח את הלמה של ויטלי)

ג. נסח את המשפטים הידועים לך לגבי $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ ו- $\int_a^x F'(t)dt$

ד. תן דוגמה לפונקציה לא יורדת $f$ ב-$[0,1]$ המקיימת $\int_0^1 f'(t)dt=0$, למרות ש-$f$ אינה קבועה. האם כאן $f$ יכולה להיות רציפה? רציפה בהחלט?

4) א. נסח את משפטי פוביני וטונלי: דבר חילוף סדר האינטגרציה.

ב. הוכח כי $\frac{\sin x}{x}$ אינה אינטגרבילית-לבג על $(0,\infty)$.

ג. השתמש במשפט פוביני ובנוסחאות האינטגרציה

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \quad (0<x) \qquad , \qquad \int e^{-xt}\sin x\,dx = -\frac{e^{-xt}}{t^2+1}(\cos x + t\sin x)$$

כדי להוכיח כי $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ ,

ד. הצג מטריצה אינסופית

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \cdots \\ 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & \\ & & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \\ & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

כדי להדגים את נחיצות תנאי משפטי פוביני-טונלי.

0366.2106

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים

סמסטר ב מועד ב, תשנ"ה.
28 August 1995

בחינה בפונקציות ממשיות.
לתלמידי המתמטיקה שנים ב,ג. המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה 3.5 שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו. ענה על 4 מבין השאלות הבאות.

__שאלה 1.__

א. תהי f אינטגרבילית על $[a, b]$ וכך שלכל x קיים: $\int_a^b f(t)dt = 0$. הראה כי $f(x)=0$ כ.ב.מ..

ב. תהי $f:[-1, 1]^2 \to R$ המוגדרת ע"י: $f(x,y) = \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ אם $x^2+y^2 \neq 0$, ו- $f(0,0)=0$.

האם f אינטגרבילית?!

__שאלה 2.__

א. תהי $A \subset R^n$. הוכח כי אם עבור כל $E \subset R^n$ מתקיים $m_e(E) = m_e(E \cap A) + m_e(E \cap A^c)$, אזי A מדידה.

ב. הראה כי הפונקציה $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ אם $x \in (0,1]$ ו $f(0)=0$, רציפה בהחלט על $[0,1]$.

__שאלה 3.__

א. תהי $A \subset R^{n+m}$ מדידה ותהי $A_x = \{ y : (x,y) \in A \}$. הראה כי כמעט לכל $x \in R^n$, הקבוצה $A_x$ מדידה.

ב. תהי $A \subset R^n$ מדידה ו $f:A \to R$ פונקציה שלה התכונה: לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $F \subset A$ סגורה כך ש $m(A-F) < \varepsilon$, וכך ש- f רציפה יחסית ל F. הראה כי f מדידה.

__שאלה 4.__

הוכח כי $L^2[a, b]$ הוא שלם.

__שאלה 5.__

א. תהי f גזירה על $[a, b]$ וכך ש- $f'$ חסומה. הראה כי $f'$ מדידה ושלכל $x \in [a, b]$ קיים $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

ב. תהי f פונקציה רציפה ועולה על $[a, b]$. הראה כי f רציפה בהחלט על $[a, b]$, אם ורק אם $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

__שאלה 6.__

תהי $(f_n)$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסת כ.ב.מ. לפונקציה f. נניח כי קיימת סדרה $(g_n)$, של פונקציות אינטגרביליות, המתכנסת כ.ב.מ. לפונקציה אינטגרבילית g, כך ש: לכל n $|f_n| \leq g_n$, ו- $\int g_n \to \int g$. הוכח כי:

א. $\int f_n \to \int f$ ; ב. $\int |f_n - f| \to 0$.

בהצלחה!!!

אוניברסיטת תל-אביב  סמסטר ב׳ תשנ״ה.

הפקולטה למדעים מדויקים  28 June 1995.

## בחינה ב-פונקציות ממשיות.

לתלמידי המתמטיקה שנים ב,ג. המורה :מ. אפשטיין.

משך הבחינה 3.5 שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו. ענה על 4 מבין השאלות הבאות.

### שאלה 1.

א. תהי $f \geq 0$ ואינטגרבילית על A. הראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל $E \subset A$ מדידה וכך ש $mE < \delta$, מתקיים: $\int_E f < \varepsilon$.

ב. הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת על $[0,1]^2$ ע״י: $f(0,0)=0$ ואחרת $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. בדוק האם f אינטגרבילית.

### שאלה 2.

יהיו $f,g:[a,b] \to R$ כאשר f רציפה ו- g רציפה בהחלט על $[a,b]$. הראה כי קיים:

$$RS\int_a^b f\,dg = L\int_a^b fg'\,dx.$$

### שאלה 3.

א. הוכח: אם סדרת הפונקציות $(f_k)$ מתכנסת במידה ל-f על A, אזי יש לה תת-סידרה המתכנסת ל-f, כ.ב.מ. ב-A.

ב. הוכח כי קבוצת הפונקציות הרציפות צפופה ב-$L^2[a,b]$.

### שאלה 4.

א. יהיו $f \in L[a,b]$ ו-F כך ש: $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. הוכח כי כמעט לכל $x \in [a,b]$, הפונקציה F גזירה ו $F'(x) = f(x)$ כ.ב.מ.(הנח כי הטענה נכונה עבור f חסומה).

ב. האם הפונקציה הנתונה ע״י: $f(x) = x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}$ עבור $x \in (0,1]$ ו- $f(0)=0$, היא רציפה בהחלט? נמק!

### שאלה 5.

א. תהי $A \subset R^n$ מדידה. הראה כי לכל $E \subset R^n$ קיים: $m_eE = m_e(E \cap A) + m_e(E \cap A^c)$.

ב. תהי $f:[0,1]^2 \to R$ כך ש: 1) לכל $t \in [0,1]$, $f(x,t)$ (כפונקציה של x) מדידה על $[0,1]$; 2) לכל $x \in [0,1]$ קיים $\lim_{t \to 0} f(x,t) = h(x)$; 3) קיימת $g \in L[0,1]$, כך ש- $|f(x,t)| \leq g(x)$ לכל $t \in [0,1]$. הוכח כי קיים:

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 f(x,t)dx = \int_0^1 h(x)dx.$$

### שאלה 6.

א. תהי $f:[a,b] \to R$ פונקציה רציפה בהחלט וכך ש $f'(x) = 0$ כ.ב.מ.. הראה כי f קבועה.

ב. יהיו f ו g מדידות, $f \geq g$ כ.ב.מ., וכמו כן נניח כי g אינטגרבילית. הראה כי: $\int (f-g) = \int f - \int g$.

בהצלחה !!!

אוניברסיטת תל-אביב  מועד ב' - 19.9.93

הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בפונקציות ממשיות

המורה: מ. אפשטיין

ענה על 4 מבין השאלות הבאות

**שאלה 1**

א. הגדר את המושג פונקציה רציפה בהחלט והראה שאם $f$ רציפה בהחלט על $[a,b]$ אזי היא בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$.

ב. הוכח שאם $f$ רציפה בהחלט על $[a,b]$ ו $f'(x)=0$ כ.ב.מ, אזי $f$ קבועה.

**שאלה 2**

א. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$. הראה כי $A$ מדידה, אם ורק אם, $A=H-E$ כאשר $H\in G_\delta$ ו $mE=0$.

ב. תהי $f$ מדידה על $[a,b]$ וסופית כ.ב.מ. הוכח כי קיימת סדרה $(\varphi_n)$ של פונקציות רציפות על $[a,b]$ המתכנסת כמעט ל $f$.

**שאלה 3**

א. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ כך שלכל $E\subset\mathbb{R}^n$ מתקיים $m_e E\geq m_e(A\cap E)+m_e(E\cap A^c)$. הראה כי $A$ מדידה.

ב. תהי $f$ גזירה על $[a,b]$ עם $f'$ חסומה. הראה כי $f'\in L[a,b]$ ושלכל $x\in[a,b]$ קיים $\int_a^x f'=f(x)-f(a)$.

**שאלה 4**

א. תהי $f\in L[0,1]$. הראה כי לכל $n\in N$ $x^n f(x)\in L[0,1]$ ו $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

ב. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ מדידה ו $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה שלה התכונה ש. הראה כי $f$ מדידה.

**שאלה 5**

א. נסח את הלמה של Fatou ותן דוגמא שבה האי-שוויון הוא חזק.

ב. הראה שאם $f_k\xrightarrow{m}f$ על $A$, אזי קיימת תת-סדרה $(f_{k_j})$ המתכנסת כ.ב.מ ב $A$.

**שאלה 6**

א. תהי $A\subset\mathbb{R}^{n+m}$ כך ש $mA=0$. תהי $f:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=3$ אם $x\in A$ ו $f(x)=0$ אם $x\in A^c$. הראה כי ל $f$ התכונה $\mathcal{F}$ (Fubini).

ב. הוכח את משפט ההתכנסות הדומיננטית.

בהצלחה!

אוניברסיטת ת"א.
הפקולטה למדעים מדויקים.



סמסטר קיץ 20-9-93.

# מבחן בפונקציות ממשיות

משך הבחינה: 3 שעות. המורה: מרינה רוין.

יש לענות על שאלה מס' <u>1</u>, ועל <u>2 שאלות</u> מבין השאלות 2-5 <u>ועל 1</u> מבין השאלות 6-7. ערך כל שאלה - 25 נק'.

<u>שאלה 1</u>) נתונים $(X,A,\mu)$ מרחב (ער) מידה. הגדר את המרחב $L^p(X)$, $1\le p<\infty$, והוכח ש-$L^p(X)$ מרחב וקטורי נורמי, עם הנורמה

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f(x)|^p\right)^{1/p}$$

<u>שאלה 2</u>) הוכח משפט לוזין (Luzin) על R. אם $f:R\to\bar{R}$, $f$ מדידה לפי לבג (Lebesgue) וסופית כמעט בכל מקום - ($|f|<\infty$ a.e), 

$\forall\varepsilon>0,\ \exists g:R\to\bar{R}$, $g$ רציפה ב-R, כך ש

$$\underline{m\{x, f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon}.$$

<u>שאלה 3</u>. הוכח <u>משפט איגורוב</u> (Egorov).

יהיו: א) $(X,\mathcal{M},m)$ מרחב מידה, $m(X)<\infty$.

ב) סדרת פונקציות $(f_n)_{n\ge 1}$, $f_n:X\to\bar{R}$.

$f_n$ מדידה וכמעט בכל מקום סופית ($|f_n|<\infty$, a.e), $\forall n\in N$

2)



(ה $\{f_n\}$ מתכנסת במדה במובן לפונקציה $f$ , סופית במובן

($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$ , $|f|<\infty$ a.e)

אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת כמעט במידה שווה על $X$, לפונקציה $f$

($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.u} f$)

## שאלה 4)

הוכח משפט לבג (Lebesgue) של ההתכנסות שולטנית.

נתונות $f_n : X \to \bar{R}$ , $n=1,2,\dots$ , סדרה של פונקציות מדידות ($X \subset R$)

א) אם קיימת $g : X \to \bar{R}_+$ ו $g$ , פונקציה אינטגרבילית (לבג) ב- $X$, כך ש-

$\forall n \in N$ , $|f_n| \le g$ ( $g \in \mathcal{L}(X)$ )

1) הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת a.e ל $f$ ב $X$

($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$)

אז: א) $f \in \mathcal{L}(X)$

ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,dx = \int_X f\,dx$

## שאלה 5

הוכח את המשפט:

נתונה $f$ פונקציה אינטגרבילית לבג ב $[a,b]$ ,

( $f \in \mathcal{L}[a,b]$ ) , $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$

אז $F'(x) = f(x)$ a.e , $x \in [a,b]$

שאלה 6) הראה שהפונקציה

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right)$$

לא אינטגרבילית רימן על $[0,1]$ למרות ש-$f$ רציפה ב-
$[\varepsilon,1]$, לכל $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<1$, וקיים $\lim_{\varepsilon\downarrow 1}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$

שאלה 7) תהי

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{\pi}{x^2}, & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

הראה כי לפונקציה $f$, יש נגזרת סופית על $[0,1]$ אבל $f'(x)$ לא אינטגרבילית ב-$[0,1]$.
לפי Lebesgue

בהצלחה!

סמסטר א תשנ"א מועד מיוחד (נ"ב)

הפקולטה למדעים מדויקים

מדמ"ח: פונקציות ממשיות

המורה: מ. אפשטיין

<u>משך הבחינה: 3 שעות</u>

ענה על 4 מבין השאלות הבאות. אין להשתמש בחומר עזר.

<u>שאלה 1</u> א. תהי $E$ מדידה ו- $f:E\to R$ בעלת התכונה של (משפט Lusin). הוכח כי $f$ מדידה.
ב. הוכח ש- $E$ מדידה אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $F$ סגורה, $F\subset E$ ו- $m_e(E-F)<\varepsilon$.

<u>שאלה 2</u> א. הוכח שלכל $A$ מדידה ולכל קבוצה $E$ מתקיים: $m_e E = m_e(A\cap E)+m_e(E\cap A^c)$.
ב. אם $\{A_k\}$ משפחה בת מניה של קבוצות מדידות זרות אזי $m(\bigcup_k A_k)=\sum_k m A_k$.

<u>שאלה 3</u> א. $\{f_k\}$ סדרה של פונקציות מדידות על $E$ ו- $f_k\to f$ כ.ב. ב- $E$. הוכח שאם קיימת סדרה $\{g_k\}$ של פונקציות אינטגרביליות על $E$, המקיימת: $g_k\to g$ כ.ב. ב- $E$, כאשר $g$ אינטגרבילית, ולכל $k$ $|f_k|\le g_k$ וגם $\lim\int_E g_k=\int_E g$ אזי קיים גם $\lim\int_E f_k=\int_E f$.
ב. $f:E\to R$ מדידה ו- $g:R\to R$ רציפה. הוכח כי $g\circ f$ מדידה.

<u>שאלה 4</u>. $f:[a,b]\to R$ גזירה ו- $f'$ אינטגרבילית על $[a,b]$. הראה כי $\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$ $\forall x$.
(אין להוכיח את הלמה הבסיסית, מספיק לצטט אותה במדויק).

<u>שאלה 5</u>. א. תהי $f:[a,b]\to R$ עולה. כידוע $f$ גזירה כ.ב. ב- $[a,b]$. הוכח כי $f'$ מדידה וקיים: $\int_a^b f'\le f(b)-f(a)$.
ב. תן דוגמה של פונקציה עולה שעבורה בנוסחה הנ"ל אי שוויון ממש.

<u>שאלה 6</u> א. נגדיר הסדרה $\{f_n\}$ כאשר $f_n=\chi_{[n,+\infty)}$ $\forall n$. אזי: $\lim f_n=f$. מצא את $f$ ובדוק האם $\lim\int f_n=\int f$.
ב. תן דוגמה של סדרת פונקציות שעבורה אפשר להפעיל את הלמה של Fatou ולקבל אי שוויון ממש.
ג. נגדיר $f(x)=x^{3/2}\sin\frac{1}{x}$ אם $x\in(0,1]$ ו- $f(0)=0$. האם $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$? נמק.

בהצלחה

32

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER
FACULTY OF EXACT SCIENCES
הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א', סמסטר קיץ, תשנ"א
תאריך הבחינה:15.9.91

## הבחינה בפונקציות ממשיות
## המורה:דר' יורם הירשפלד

משך הבחינה: 3 שעות, בחינה עם חומר פתוח.
ענה על 4 מ 6 השאלות. שים לב - הניקוד איננו רק עבור רעיון ההוכחה אלא עבור הוכחה מדוייקת ומסודרת.

1. הוכח שכל קבוצה פתוחה היא אחוד (בדרך כלל לא זר) של סדרת קטעים סגורים.

2. תהי $A \subseteq R$ קבוצה עם מידה חיצונית סופית. הוכח

א. יש קבוצה מדידה E כך ש $A \subseteq E$ ו $m^*(A) = m(E)$

ב. אם יש קבוצה מדידה F המקיימת $F \subseteq A$ ו $m^*(A) = m(F)$ אזי A מדידה.

3. א. הוכח שיש קבוצות לא מדידות בעלות מידה חיצונית קטנה כרצוננו (אפשרות - בדוק שבבניה המקובלת לקבוצה לא מדידה אפשר לכל $\varepsilon$ לבחור את כל מיצגי המחלקות בקטע $(0,\varepsilon)$ ).

ב. אם E ו F מדידות וזרות ואם $A \subseteq F$ ו A לא מדידה אזי $E \cup A$ לא מדידה ו $m^*(E \cup A) = m^*(A) + m(E)$

ג. לכל מספר ממשי $d > 0$ יש קבוצה לא מדידה A כך ש $m^*(A) = d$

4. יהי $\langle R, \mathbb{B}, \mu \rangle$ מרחב מידה על מספרים הממשיים שבו ה $\sigma$- אלגברה $\mathbb{B}$ מכילה (בין השאר) את כל הקטעים.

הוכח שאם $\mu([0,1]) = \infty$ אזי יש נקודה שכל סביבותיה בעלות מידה אינסופית. (רמז:קבל סדרת קטעים מתאפסים או השתמש בלמה של היינה בורל).

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES

הפקולטה למדעים מדוייקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

5. תהי F רציפה בהחלט ומונוטונית עולה בקטע $[a,b]$, נניח שלכל x

ולכל $\delta$ יש נקודה $x'$, $x < x' < x+\delta$ המקיימת

$$f(x') - f(x) < x' - x$$

הוכח כי $f(b) - f(a) \leq b-a$

(אפשרות: הראה שלכל $\varepsilon$ $f(b)-f(a) \leq b-a+\varepsilon$. הקצב $\frac{\varepsilon}{2}$ לרציפות בהחלט ו $\frac{\varepsilon}{2}$ להפרש בין כסוי ויטלי לבין הקטע).

6. יהי L מרחב הפונקציות המדידות יהי $H : L \longrightarrow R$ פונקציונל (כלומר טרנספורמציה לינארית).

לכל קבוצה A מדידה נגדיר $\mu(A) = H(\chi_A)$

א. הוכח כי $\mu$ היא מידה אדיטיבית סופית על שדה הקבוצות המדידות לבג.

ב. הוכח שהתנאי הבא מספיק כדי ש $\mu$ תהיה $\sigma$- אדיסיבית; אם $f_n$ סדרה עולה מונוטונית ל f ב L אזי $\lim (H(f_n)) = H(f)$

ב ה צ ל ח ה !!!

קרית האוניברסיטה, רמת-אביב, תל-אביב 69978, טל. 03-5450537

82

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

מועד א' סמסטר ב' תש"ן
10.7.90

בחינת מעבר בפונקציות ממשיות
לתלמידי מתימטיקה שנים ב ג
המורה: פרופ' א. יקימובסקי

משך הבחינה: 4 שעות.
<u>הוראות:</u>

א. עליך לענות על 3 מתוך 5 השאלות.
ב. כל השאלות שוות בערכן.
ג. אין צורך להעתיק את השאלות. מספיק לציין את מספר השאלה.
ד. אין להעזר בחומר עזר כלשהוא.

<u>שאלה 1:</u> הוכח כי לכל מספר ממשי $a$ הקרן $E = (a, +\infty)$ היא קבוצה מדידה לבג על הישר הממשי.

<u>שאלה 2:</u> תהיה $E$ קבוצה מדידה. תהיינה $f, f_n$ $(n \geq 1)$ פונקציות אי שליליות ומדידות על הקבוצה $E$ שעבורן מתקיים לכל $x \in E$ $f(x) = \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. הוכח כי מתקיים $\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$.

<u>שאלה 3:</u> יהיה $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מדה. תהיה $E$ קבוצה מדידה שמדתה סופית. תהיינה $f, f_n$ $(n \geq 1)$, פונקציות ממשיות ומדידות על $E$. יתקיים לכל $x \in E$ $f(x) = \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. הוכח כי לכל זוג מספרים $\epsilon > 0, \delta > 0$ קיימים קבוצה מדידה $A \subset E$ ומספר טבעי $N$ כך שמתקיימים $\mu(A) < \delta$ ולכל $n > N$ ולכל $x \in E \setminus A$ $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

<u>שאלה 4:</u> א. הגדר את המושג "פונקציה רציפה בהחלט על קטע סגור $[a, b]$". ב. הוכח כי אם $f$ רציפה בהחלט על קטע סגור $[a, b]$ ומתקיים $f'(x) = 0$ כ.ב.מ. ב $[a, b]$ (לגבי מדת לבג) אז הפונקציה $f$ היא קונסטנטה על $[a, b]$.

<u>שאלה 5:</u> הפונקציה $\varphi(x)$ מוגדרת על ידי

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad 2n \leq x < 2n+1 \quad \forall n \in Z \\ -1 & \text{for} \quad 2n+1 \leq x < 2n \quad \forall n \in Z \end{cases}$$

נגדיר $\varphi_n(x) := \varphi(2^n x)$ לכל $n = 0, 1, 2, \ldots$. תהיה $f$ אינטגרבילית לבג על $[0, 1]$. הוכח כי הפונקציות $\varphi_n$ $(n \geq 0)$ הן פונקציות מדידות לבג על $[0, 1]$ ושמתקיים

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f \varphi_n d\mu = 0$$

(כאשר האינטגרל הוא אינטגרל לבג).

בהצלחה

83

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

מועד ב' סמסטר ב' תשין
10.9.90

בחינת מעבר בפונקציות ממשיות
לתלמידי מתימטיקה שנים ב ג
המורה: פרופ' א. יקימובסקי

משך הבחינה: 4 שעות.
הוראות:
א. עליך לענות על 3 מתוך 5 השאלות.
ב. כל השאלות שוות בערכן.
ג. אין צורך להעתיק את השאלות. מספיק לציין את מספר השאלה.
ד. אין להעזר בחומר עזר כלשהוא.

שאלה 1: יהיו $a < b$ מספרים ממשיים. הוכח כי המדה החיצונית של לבג על הישר של הקטע הסגור $[a,b]$ היא $b-a$.

שאלה 2: תהיה $f$ פונקציה אינטגרבילית דרבו על הקטע הסופי הסגור $[a,b]$. הוכח כי $f$ מדידה לבג על $[a,b]$ ושאינטגרל דרבו ולבג של $f$ על $[a,b]$ שווים בערכם.

שאלה 3: תהיה $f$ אינטגרבילית לבג על הקטע הסגור $[a,b]$ $-\infty < a < b < +\infty$. נגדיר לכל $x \in [a,b]$ $F(x) := \int_{[a,x]} f d\mu$. הוכח כי הפונקציה $F$ גזירה כ.ב.מ לגבי מדת לבג בקטע $[a,b]$ וכי מתקיים כ.ב.מ. בקטע $[a,b]$ $F'(x) = f(x)$. (הוכח את הטענה קודם כאשר $f$ חסומה על $[a,b]$).

שאלה 4: תהיה $E$ קבוצה מדידה ותהיה $g$ פונקציה אינטגרבילית על הקבוצה $E$. תהיינה $f_n, f$ $(n \geq 1)$ פונקציות מדידות על $E$ המקימות כ.ב.מ. ב $E-$ $| f_n(x) | \leq g(x)$. וכמו כן יתקיים כ.ב.מ. ב $E-$ $f_n(x) \to f(x)$. הוכח כי הפונקציות $f_n, f$ $(n \geq 1)$ אינטגרביליות על $E$ ומתקיים $\exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

שאלה 5: הוכח את שני החלקים של השאלה:
א. תהיינה $f, g$ רציפות בהחלט, כל אחת על קטע מסוים. תהיה $g$ עולה. הוכח כי אם הפונקציה המורכבת $f \circ g$ מוגדרת אז $f \circ g$ רציפה בהחלט.
ב. הוכח כי אם $f$ וכן $f'$ רציפות על קטע $[a,b]$ אז $f$ רציפה בהחלט על $[a,b]$.

בהצלחה

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים.

מועד א. סמסטר ב תשמ"ט
28.6.89

# פונקציות ממשיות

המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות. אין להשתמש בחומר עזר.
ענה על 4 שאלות מתוך 6 הבאות.
חלק א' בכל שאלה שווה 20 נקודות וחלק ב - 5 נקודות.

## שאלה 1

הוכח כי $E$ מדידה אם ורק אם קיימת קבוצה $H$ ב $F_\sigma$, כך ש
$H\subset E$ ו $m^*(E-H)=0$. (נמק את טענתך)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ מדידה ו $B$ קבוצת בורל. הוכח כי $f^{-1}(B)$ מדידה.

## שאלה 2

נסח והוכח את הלמה של Fatou.
חשב (אם קיים): $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^n \frac{(n+x)^n}{n^n e^{2x}}\,dx$. נמק.

## שאלה 3.

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ו $f'$ חסומה. הראה כי $f'$
אינטגרבילית לפי לבג ב $[a,b]$ ושקיים: $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$.

נתונה: $f(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ x^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x} & ; x\in(0,1]\end{cases}$. האם $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$? נמק.

**4**

$\{f_n\}$ היא סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש: $\sum_1^\infty \int |f_n| < \infty$.
הוכח כי $\sum_1^\infty f_n(x)$ מתכנס a.e, שהגבול f אינטגרבילי, ושווה:

$$\int f = \sum_1^\infty \int f_n .$$

ב. הוכח כי אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$ אזי היא בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$.

**שאלה 5.**

א. f היא פונקציה חסומה ומדידה על $[a,b]$ !

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a) \;;$$

הוכח כי $f(x) = F'(x)$ a.e ב $[a,b]$. (נמק את טענותיך).

ב. הוכח כי אם $f \ge 0$ מדידה ו $\int_E f = 0$ אזי $f = 0$ a.e על $E$.

**6**

ציין ד' תוצאות חשובות, הנוגעות לפונקציות ב $L^p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$,
הוכח שתיים מהטענות שלך.

הראה כי אם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה אזי היא מדידה.

בהצלחה.

(21)

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד ב' סמסטר ב' תשמ
23.9.85

## פונקציות ממשיות
### לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' רודמן

משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר שהוא.
ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
משקל כל שאלה בציון הבחינה הוא 25%.

### שאלה 1

הוכח כי עבור קבוצות מדידות חסומות וזרות $A_1$ ו- $A_2$ מתקיים

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

אין צורך להוכיח כי $A_1 \cup A_2$ מדידה. השתמש בעובדה כי

$$|m_e(X) - m_e(Y)| \leq m_e(X \triangle Y)$$

עבור קבוצות חסומות $X$ ו- $Y$. כאן $m_e$ מידה חיצונית
ו- $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ הפרש סימטרי.

### שאלה 2

א. הוכח כי אם $f_n \to f$ במרחב $L_p$ $(1 \leq p < \infty)$
אזי קיימת תת סידרה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת כמעט תמיד.

ב. תן דוגמא לסידרה ב- $L_p$ שאינה מתכנסת כמעט תמיד.

### שאלה 3

א. תהי $f(x)$ פונקציה פשוטה עם תומך חסום. הוכח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה $E \subset R$ עם $m(R \setminus E) < \varepsilon$ ופונקציה רציפה $g(x)$ על $R$ כך ש- $f(x) = g(x)$ לכל $x \in E$.
רמז: השתמש בקרוב של קבוצה מדידה על ידי קבוצות סגורות ופתוחות.

ב. האם התכונה שתוארה בחלק א' נכונה לכל פונקציה מדידה (לאו דוקא עם תומך חסום)?

**שאלה 4**

א. נסח שני משפטים הדנים באינטגרלים $\int_E f_n$ של סידרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$:
משפט ההתכנסות החסומה של לבג ומשפט ההתכנסות של סידרה מונוטונית.

ב. על ידי שימוש באחד המשפטים האלה חשב

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx.$$

**שאלה 5**

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$. הוכח כי עבור כל $x \in [a,b]$
מתקיים

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a).$$

בהצלחה!!!

(19)

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר ב' תשמ"ה
25.7.85

## פונקציות ממשיות
## לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' ל. רודמן

משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות
אסור להשתמש בחומר עזר כלשהוא.
ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
משקל כל שאלה בציון הבחינה הוא 25.

**שאלה 1**

הוכח כי אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות המקיימות $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$

אזי

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right) = 0.$$

**שאלה 2**

א. נסח את משפט אגורוף בדבר סידרת פונקציות מדידות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ על קבוצה מדידה $E$, $m(E) < \infty$.

ב. תן דוגמא המראה כי משפט אגורוף לא נכון עבור קבוצות מדידות $E$ עם $m(E) = \infty$.

**שאלה 3**

הוכח את המשפט הבא: אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרת פונקציות אינטגרביליות אי שליליות אזי

$$\int_R \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_R f_n .$$

(סף)



שאלה 4

א. הגדר את הקבוצה $L_\infty$.

ב. הגדר את הנורמה ב- $L_\infty$.

ג. הוכח כי $L_\infty$ הינו מרחב לינארי נורמי.

ד. תן דוגמא לפונקציה ב- $L_\infty$ שאינה שייכת ל- $L_p$ עבור $1 \le p < \infty$.

ה. עבור כל $p$, $1 \le p < \infty$ תן דוגמא לפונקציה ב- $L_p$ שאינה שייכת ל- $L_\infty$.

שאלה 5

נתונה פונקציה חסומה ומדידה $f(x)$ (על הישר הממשי). הוכח כי הפונקציה

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

גזירה כמעט בכל מקום ו-

$$F'(x) = f(x)$$

כמעט בכל מקום.

הנח (בלי הוכחה) כי הטענה הזאת בכונה עבור פונקציות פשוטות.

בהצלחה!!!

3.2.84

<u>בחינה בפונקציות ממשיות</u>

מועד א'

הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות.

ענה על 3 מתוך 5 השאלות הבאות. -

חומר עזר.

1. הוכח שאם $F$ רציפה בהחלט על $[a,b]$ ו- $F'=0$ a.e,

אז $F$ קבועה.

הראה שאם $F$ רציפה בהחלט על $[a,b]$ - אז $F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt$

2. הוכח את משפט לוזין.

הראה שאם $f:E\to R$ מדידה ו- $g:R\to R$ רציפה, אז $g\circ f$ מדידה.

3. תהי $E$ מדידה עם $mE<\infty$ ו- $f:E\to R$ חסומה. הראה שאם $\inf\limits_{f\le\psi}\int_E \psi = \sup\limits_{\varphi\le f}\int_E \varphi$, $\varphi,\psi$ פשוטות, אז $f$ מדידה.

האם משפט Egoroff אפשרי על הדרישה $mE<\infty$? נמק.

4. בנה דוגמת חלוקת של פונקציות הנכללות ב- $L^p[0,1]$, $1\le p<\infty$,

כח אותה [illegible] שלך.

יהיו $f_n:R\to R^+$ מדידות, אי-שליליות, $f_n\to f$ a.e ו- $\int f_n\to\int f<\infty$.

הראה שלכל $E$ מדידה $\int_E f_n\to\int_E f$.

5. תהי $E\subset R^2$ מדידה. נסח משפט בדבר הקשר בין $mE$ ו מידת החתכים של $E$. הוכח את המשפט עבור $E\in F_\sigma$ בלבד.

עבור כל $n\in N$, תהי $f_n$ הפונקציה האופיינית של הקטע $[\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}]$ כאשר $p$ ו- $q$ הם השלמים היחידים כך ש- $n=p+2^q$ עם $0\le p<2^q$. הראה ש- $f_n\Rightarrow 0$ על $[0,1]$ (שאיפה במידה). האם [illegible] על $[0,1]$?