

בחינה בפונקציות ממשיות
מרצה: פרופ' דני לויתן

- משך הבחינה שלוש שעות
- אין להשתמש בחומר עזר

ענה על ארבע מחמש השאלות הבאות:

שאלה 1

- א. הגדירו את המדה החיצונית של לבג ומחי קבוצה מדידה לבג.
ב. הוכיחו כי אוסף הקבוצות המדידות לבג הוא σ -אלגברה.

שאלה 2

- א. הגדירו את המושג פונקציה רציפה בהחלט ב- $[a, b]$
ב. הוכיחו כי f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ אם היא אינטגרל (כפונקציה של הקצה העליון) של פונקציה אינטגרבילית.

שאלה 3

- א. הוכיחו כי אם f מדידה וחסומה על E מדידה, אז
$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi$$

(φ ו- ψ פשוטות)
ב. מצאו פונקציה $f \geq 0$ כך, ש- $\alpha g \leq f$ מדידה g
$$\int_0^1 g \geq 1 \iff \int_0^1 g = 0 \iff g \geq f \text{ ו- } g \text{ מדידה}$$

שאלה 4

א. חשבו

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

נא לחסביר על מה מסתמכים.

- ב. יהי $1 \leq p < \infty$ ויהיו $f_n, f \in L_p[0,1]$. אם $f_n \rightarrow f$ כביים ב- $[0,1]$

$$\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$$

הוכיחו כי $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f ב- L_p

שאלה 5

- א. הגדירו את המושג $\{f_n\}$ מתכנסת במידה ל- f .
- ב. נסחו והוכיחו את קריטריון קושי לחתכנסות במידה.

בתצלחה!

סמסטר ב', מועד א', תש"ס
תאריך הבחינה: 28.6.2000

הבחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' דני לויתן

משך הבחינה: שלוש שעות.
ענה על שלוש מארבע השאלות.
ללא חומר עזר.

שאלה 1

א. תהי m^* המידה החיצונית של לבג על הישר. הגדר את המושג E מדידה לבג, והוכח קיום קבוצה שאינה מדידה.

ב. תן דוגמא של סדרת קבוצות A_i על הישר בעלות התכונות $A_i \supseteq A_{i+1}$ לכל i ו- $m^* A_i < \infty$

$$m^*(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) < \lim_{i \rightarrow \infty} m^* A_i - \epsilon$$

שאלה 2

א. נסח והוכח את הלמה של פאטו להתכנסות כבי"מ.

ב. הוכח כי אם $f_n, f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ כבי"מ, אז $f_n \rightarrow f$ ב- L^p

$$\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p \text{ אם}$$

שאלה 3

א. הגדר את המושג f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ והוכח כי אם f רציפה בהחלט ו- $f' = 0$

כבי"מ אז f קבועה בקטע.

ב. נסח והוכח את אי שוויון ינסן.

שאלה 4

א. נסח את משפט פוביני והראה ע"י דוגמא כי תנאי האינטגרביליות הכרחי לקיום המשפט.
ב. קח כנתון שאם f מדידה על הישר אז $F(x, y) := f(x-y)$ מדידה במישור. הוכח כי אם

$f, g \in L(-\infty, \infty)$ אז עבור כמעט כל x הפונקציה $\varphi(y) := f(x-y)g(y)$ אינטגרבילית

$$\text{הפונקציה } h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \text{ שייכת ל-} L(-\infty, \infty)$$

סמסטר ב', מועד א', תשנ"ז
תאריך הבחינה: 9.6.97
מספר הקורס: 03662106

הבחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' דני לויתן

משך הבחינה: שלוש שעות.
ענה על שלוש מארבע השאלות הבאות:

שאלה 1

- א. הגדר את המושגים $E \leq R$ מדידה לבג ו- $E \leq R$ קבוצת בורל.
ב. הוכח כי קיימת קבוצה שהיא מדידה לבג ואינה קבוצת בורל; וכי קיימת קבוצה שאינה מדידה לבג.

שאלה 2

- א. נסח והוכח את הלמה של פאטו.
ב. יהי $\mathbb{R} \leq \mathbb{R}$ ויהיו $f, f_n \in \mathcal{L}^1$ הוכח כי אם $f_n \rightarrow f$ ו- $\int f_n$ כבי"מ
-1 $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$ אז $f_n \rightarrow f$ ב- \mathcal{L}^1 .

שאלה 3

- א. הגדר את המושגים התכנסות כבי"מ התכנסות במידה ותן דוגמא לסדרה המתכנסת המידה ואינה מתכנסת בשום מקום.
ב. נסח והוכח את משפט יגורוב.

שאלה 4

- א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה ופונקציה רציפה בהחלט והוכח כי אם f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ אז כך גם ההשתנות של f שם.
ב. הוכח כי פונקציה ממשית ומונוטונית ב- $[a, b]$ היא גזירה כבי"מ שם ונגזרתה אינטגרבילית.

ב ה צ ל ח ה !!!!

פונקציות ממשיות

לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג

המורה: פרופ' ד. לויטן

משך הבחינה: 3 שעות
 ענה על שלוש מארבע השאלות הבאות.

שאלה 1

- א. הגדר את המושג קבוצה מדידה (לבג) והוכח כי אוסף הקבוצות המדידות מהווה σ -אלגברה.
 ב. הוכח קיום קבוצה מדידה לבג שאינה מדידה בורל.

שאלה 2

- א. הגדר את המושג פונקציה מדידה והוכח כי f חסומה היא אינטגרבילית אם היא מדידה.
 ב. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות ואי שליליות. הוכח

$$\int \lim f_n \leq \lim \int f_n$$

שאלה 3

- א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ ופונקציה רציפה. בהחלט ב- $[a, b]$. הוכח כי אם f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ ו- $f' = c$ כבי"מ אז $f = cx + d$.
 ב. תהי $A \subseteq [0, 1]$ מדידה $\alpha > 0$ ונניח כי לכל קטע $I \subseteq [0, 1]$ הוכח $m(A \cap I) \geq \alpha m I$.
 $m A = 1$

שאלה 4

- א. הגדר את המרחב $L^p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$ והוכח שהוא מרחב נורמי.
 ב. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות ב- L^p כבי"מ ל- L^p $p > 1$. הוכח כי $f_n \rightarrow f$ ב- L^p אם $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

מקרה מסוימים - הפונקציה f היא ממשית

זאת כי לנו למדוד המסלול

1. אם הפונקציה היא הממשית בקווי המישור

מכיוון שיש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

יש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

מסלול

2. אם הפונקציה היא הממשית בקווי המישור

מכיוון שיש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

יש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

יש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

$$\int_E \lim f_n \leq \lim \int_E f_n \leq \lim \int_E f_n \leq \int_E \lim f_n$$

3. אם הפונקציה היא הממשית בקווי המישור

מכיוון שיש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

יש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

4. אם הפונקציה היא הממשית בקווי המישור

מכיוון שיש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

הוא ממשית - הוכחה כי המסלול

יש לנו פונקציה ממשית - הוכחה כי המסלול

פונקציות ממשיות
לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' ד. לויתן

משך הבחינה: 3 שעות
ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

שאלה 1

- א. הגדר את המושגים קבוצה מדידה ופונקציה מדידה, והוכח כי יש קבוצה שאינה מדידה.
ב. העזר בפונקציה קנטור להוכיח כי המקור של קבוצה מדידה על ידי פונקציה מדידה $(f^{-1}(A))$ אינו בהכרח מדיד.

שאלה 2

- א. הגדר את המושגים התכנסות כבי"מ, התכנסות במדה והתכנסות במוצע (ב- L^1). נסח והוכח שלושה משפטים על הקשרים בין סוגי ההתכנסויות הנ"ל לפי בחירתך.
ב. תהי g אינטג. על E ונניח כי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות כך ש-
 $|f_n| \leq g$ כבי"מ על E .
הוכח

$$\int_E \liminf f_n \leq \liminf \int_E f_n \leq \limsup \int_E f_n \leq \int_E \limsup f_n$$

שאלה 3

- א. הגדר את המושגים פונקציה בעלת השתנות חסומה ופונקציה רציפה בהחלט, והוכח כי פונקציה רציפה בהחלט שנגזרתה $= 0$ כבי"מ ב- $[a, b]$ קבועה שם.
ב. תהי f בעלת השתנות חסומה ב- $[0, 1]$ ורציפה בהחלט ב- $[\epsilon, 1]$ לכל $\epsilon > 0$. האם רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$. אם כן הוכח, אם לא הראה דוגמא נגדית.

א. הגדר את המרחבים $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$ והוכח כי הם מרחבים שלמים.

ב. תהי $\{f_n\}$ סדרה ב- L^p המתכנסת כבי"מ
ל- $f \in L^p$ הוכח . $f_n \rightarrow f$ ב- L^p אם

$$\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$$

בהצלחה!!!



(37)

כונת צ'יב הנוסחה - $f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$ - \Rightarrow $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$

הנוסחה - $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$

וכאן $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ - \Rightarrow

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

(34)

פונקציות ממשיכות

לתלמידי מחימטיקה שנים ב-ג

המורה: פרופ' ד. לויתן

משך הבחינה: 3 שעות

אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענה על השאלות הבאות:

שאלה 1

- א. הגדר את המושגים הבאים: התכנסות כ"מ, התכנסות במידה והתכנסות בממוצע.
ב. מהם יחסי הגרירה בין סוגי ההתכנסות הנ"ל - נסח והוכח שלושה יחסי גרירה בין הנ"ל.

שאלה 2

- א. תאר ללא הוכחות את השלבים השונים של הגדרת אינטגרל לבג תוך ציון התכונות העיקריות המחקבלות בכל שלב.
ב. תן דוגמא של פונקציה שאינה אינטגרבילית לבג אבל שעבורה קיים אינטגרל רימן לא אמיתי. הוכח כי אם f אינטגרבילית לבג וקיים עבורה אינטגרל רימן לא אמיתי אז

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

שאלה 3

- א. הגדר את המושג רציפות בהחלט והוכח כי f היא רציפה בהחלט אם היא האינטגרל הבלתי מסוים של נגזרתה.
ב. תהי f רציפה בהחלט ב- $[\varepsilon, 1]$ לכל $\varepsilon > 0$ ונניח כי f רציפה ב-0. הראה על ידי דוגמא כי f אינה בהכרח רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$ לעומת זאת אם נוסף כהנחה ש- f בעלת השתנות חסומה ב- $[0, 1]$ הוכח כי f אכן רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$.
(רמז: קח כנתון שפונקציו רציפה בעלת השתנות חסומה היא בעלת השתנות רציפה).

הגדר את המושגים מדה חיצונית, קבוצה מדידה ופונקציה מדידה.

הוכח כי אם f מדידה וממשית ו- g רציפה על $(-\infty, \infty)$ אז $g \circ f$ מדידה.

בהצלחה!!!