

הבחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים, ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון ועל שתי שאלות מהחלק השני.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, מספיק לרשום את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. בהנחה כי f מדידה וחסומה הוכח כי

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

כבי"מ ב- $[a, b]$. לאחר מכן, קבל אותה מסקנה בהנחה כי f אינטגרבילית על $[a, b]$.

שאלה 2 (35 נקודות)

יהיו (X, Σ, μ) מרחב מדידה ו- $1 \leq p \leq \infty$. הוכח כי המרחב $L^p(X, \Sigma, \mu)$ שלם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$. הוכח כי קיימות פונקציות רציפות h, g על $[a, b]$ המקיימות: $g+h=f$, g רציפה בהחלט, h בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ ו- $h=0$ כבי"ב - $[a, b]$. הראה כי אם גם $g_1+h_1=f$ הוא פירוק כנייל אזי $g-g_1$ פונקציה קבועה.

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ מניה של קבוצת כל המספרים הרציונליים. עבור כל k טבעי נגדיר

$$f_k(x) = \begin{cases} (x - I_k)^{-1/2}, & I_k < x \leq I_k + 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכח כי $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_k$ מתכנס כבי"ב על \mathbb{R} ולפונקציה אינטגרבילית f המקיימת: לכל קטע (a, b) ולכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$m((a, b) \cap \{x: f(x) \geq \epsilon\}) > 0.$$

שאלה 3 (35 נקודות)

א. תהיינה f פונקציה אינטגרבילית על מרחב מידה (X, Σ, μ) ו- $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על X המקיימות $|g_n(x)| \leq 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in X$. הוכח כי אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |g_n(x)| d\mu(x) = 0$$

אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f(x) g_n(x)| d\mu(x) = 0.$$

ב. הוכח כי $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בהחלט על $(0, \infty)$.

מספר 38/מ"א
תל אביב

9.6.99

הג'רד הבא נקרא מספר

הג'רד הבא נקרא מספר ϵ -
אם $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל x שמתקיים $|x - a| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
הג'רד הבא נקרא מספר ϵ -
אם $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל x שמתקיים $|x - a| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

הג'רד הבא נקרא מספר ϵ -
אם $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל x שמתקיים $|x - a| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

הג'רד הבא נקרא מספר ϵ -
אם $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל x שמתקיים $|x - a| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

הג'רד הבא נקרא מספר ϵ -
אם $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל x שמתקיים $|x - a| < \delta$ אז מתקיים $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

השקפה
ערכי שליליים - האבן

למטרה 1 (35) נקראו f פונקציה רציפה על $[0,1]$ כזו ש-
אם $|f'(x)| \leq M$ לכל $x \in [0,1]$. האם יש ערכי שליליים
עבור $f(E)$ עבור $E \subset [0,1]$ כזה ש-
 $m(f(E)) \leq M m(E)$?

למטרה 2 (35) נקראו f פונקציה רציפה על $[0,1]$ כזו ש-
יש לה ערך מינימלי שלילי. האם יש ערכי שליליים
עבור $\int_0^1 (f(x))^n dx$?

קבוצה (a, b) (עם $a < b$) היא כזו ש-
קבוצה E היא כזו ש-
 $f = x_E$?

למטרה 3 (35) נקראו $E \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה כזו ש-
 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \in E\}$ היא כזו ש-
יש לה ערך מינימלי שלילי. האם יש ערכי שליליים
עבור $\int_{\mathbb{R}^2} f(x-y) dx dy$?

בהקשר זה

בחינה בתורת הפונקציות הממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים: ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון ועל שתי שאלות מהחלק השני. אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, די לרשום את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד.

שאלה 1 (40 נקודות)

תאר תהליך בניית האינטגרל לפי לבג (בהנחה כי מרחב המידה נתון מראש) הוכח את הלמה של פטו ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.

שאלה 2 (40 נקודות)

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. נסח את אי שוויונות הולדר ומינקובסקי ותאר את בנית המרחבים $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. הוכח את שלמותם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה אינטגרבילית לפי לבג על \mathbb{R} . יהי $0 < \epsilon$. הוכח כי קיימת פונקציה רציפה φ על \mathbb{R} המתאפסת מחוץ לקטע חסום והמקיימת

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f - \varphi| d\mu < \epsilon.$$

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי f אינטגרבילית לפי לבג על \mathbb{R} . עבור $t \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin tx \, dx.$$

הוכח כי \hat{f} רציפה על \mathbb{R} .

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = 0.$$

שאלה 3 (35 נקודות)

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה סופי ותהיינה $f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ פונקציות מדידות על X . הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה ל- f . אם ורק אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu = 0.$$

שאלה 4 (35 נקודות)

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בהחלט על $[a, b]$ המתכנסת נקודתית

לפונקציה בעלת השתנות חסומה f . נניח כי לכל n טבעי ולכל $a \leq x \leq y \leq b$ מתקיים

$$f_n(y) - f_n(x) \leq f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x).$$

הוכח כי f רציפה בהחלט ב- $[a, b]$ ו

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' = f'$$

כבי"מ.

ב ה צ ל ח ה !!!

מחנך
0366-2106

בחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שלושה חלקים.
ענה על שאלה אחת מכל חלק.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

1. (40 נקודות) תהי μ מידה על אלגברה של קבוצות \mathcal{A} . תן סקירה

כללית על תחליף המשכח של μ למידה על σ -אלגברה. הוכח כי אם μ סופית אזי המשכח של μ ל- σ -אלגברה הנוצרת ע"י \mathcal{A} היא יחידה.

2. (40 נקודות) תהי f פונקציה לא יורדת בקטע $[a, b]$. תן סקירה

כללית של הוכחות המשפט: f' קיימת כמעט בכל מקום. הוכח כי f' אינטגרבילית על $[a, b]$.

$$\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a).$$

חלק ב'

1. (40 נקודות) תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על (X, Σ, μ) .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$$

הוכח כי אם

אזי $\{f_n\}$ מתכנסת לאפס כמעט בכל מקום.

2. (40 נקודות) א. הוכח כי אם ψ^2 מדידה ו- $\{\chi : \psi(\chi) > 0\}$ מדידה

אזי גם ψ מדידה (ψ פונקציה ממשית על מרחב מדיד).

ב. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על מרחב

המידה (X, Σ, μ) המתכנסת לאפס כביים. עבור $x \in X$ נסמן

$$g_n(x) := \max \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

ניח כי קיים קבוע $M > 0$ המקיים $\int_X g_n d\mu \leq M$ לכל n

טבעי. הוכח כי g אינטגרבילית וכי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 0.$$

1. (30 נקודות) תהי $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת;
 א. לכל $t \in [0,1]$ הפונקציה $x \rightarrow f(x,t)$ אינטגרבילית על $[0,1]$;

ב. בכל נקודה $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$ קיימת הנגזרת החלקית
 $g(x,t) := \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$

ג.
 $M := \sup \{ |g(x,t)| : 0 \leq x, t \leq 1 \} < \infty$
 חוכח כי הפונקציה

$$F(t) := \int_0^1 f(x,t) dx$$

גזירה ב $[0,1]$ וכי

$$F'(t) = \int_0^1 g(x,t) dx, \quad 0 \leq t \leq 1$$

2. (30 נקודות) יהיו (X, Σ, μ) מרחב מידה סופי, $1 < p < \infty$ - פונקציה אינטגרבילית, נניח כי קיים קבוע M עבורו

$$\left| \int_X g \psi d\mu \right| \leq M \|\psi\|_p$$

לכל פונקציה מדידה חסומה ψ

תהי $\{\chi_n\}$ סדרה לא יורדת של פונקציות פשוטות אי שליליות השואפת

ל- $|g|^2$ (נסמו $q := 1 - \frac{1}{p}$)
 $\psi_n := (\chi_n)^{1/p} \operatorname{sign} g$

חוכח

$$\int_X \chi_n d\mu \leq \int_X \psi_n g d\mu \leq M \left[\int_X \chi_n d\mu \right]^{1/p}$$

וחסק מכאן כי $g \in L^2$