

23/1/92

פונקציות ממשיות : מבחן, מועד א, סס' א, תשנ"ב

מורה: י. אהרונסון

זמן המבחן: שלוש שעות.  
הנחיות: ענה על שאלה מס. 1 ועל שלוש שאלות נוספות ללא שימוש בכל חומר עזר.

1. (40 נק') הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(a) אם  $A$  תת-קבוצה מדידה של  $(0,1)$  ו- $\mu(A \cap J) > \frac{1}{2}|J|$  לכל תת-קטע  $J$  של  $(0,1)$ , אזי  $\mu(A) > 3/4$ .

(b) כל פונקציה מדידה, חסומה על  $(0,1)$  הינה גבול במ'ש של פונקציות פשוטות.

(c) אם  $U$  תת-קבוצה פתוחה של  $(0,1)$ , שהיא צפופה ב- $(0,1)$ , אזי  $\mu(U) = 1$ .

(d) אם  $A_n \supseteq A_{n+1}$ , אזי

$$\mu(U_n \cap A_n) \rightarrow \mu(A_n) \text{ כאשר } n \rightarrow \infty.$$

2. (20 נק') יהיה  $(X, B, m)$  מרחב הסתברות, ותהינה  $f_n: X \rightarrow R$  פונקציות מדידות.

(a) הוכח כי אם  $f_n \leq M$  ו- $\limsup_n f_n = 0$  כ"ת, אזי לכל  $\delta > 0$  קיים  $A \in B$ ,  $m(A) > 1 - \delta$ , כך שלכל  $x \in A$ ,  $f_n(x) < M + \delta$ .

(b) האם  $\int_X |f_n| dm \rightarrow 0$  גוררת  $f_n \rightarrow 0$  כ"ת?

3. (20 נק') יהיה  $L^p([a,b])$  ( $1 \leq p < \infty$ ). הוכח כי

(a)  $\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \rightarrow 0$  כאשר  $\alpha \rightarrow \infty$ .

(b) לכל  $\delta > 0$  קיים  $g \in C([a,b])$  כך ש- $\|f-g\|_p < \delta$ .

4. (20 נק')

(a) נסח והוכח את משפט הכיסוי של Vitali.

(b) הוכח כי אם  $f: [a,b] \rightarrow R$  מונוטונית, אזי  $f$  גזירה בכמעט כל נקודה של  $[a,b]$ .

5. (20 נק') יהיה  $(X, B, m)$  מרחב מידה  $\sigma$ -סופית, ותהינה  $f, g, h: X \rightarrow R$  פונקציות מדידות. הוכח כי

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

מתי מתקיים שיוויון? (המסתמך על אי-שוויון Holder-מחובקש להוכיחו).

בהצלחה!

(51)  
פונקציות ממשיות

19.6.88

מבחן משהר מוסר'ס א' מ'פ'ר

קריטריון:  $f$  פשוט עולה  
 הנחיות:  $f$  צריכה להיות פשוט עולה  
 ע"מ לבדוק חוקר צ"ר

1.  $(k, 1)$  הנחיה התייבית של  $A \subseteq \mathbb{R}$  מובנת ע"י

כאשר 
$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \text{ ארטיב } \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \right\}$$

$|I|$  מוסר'ס א' האורך של  $I$  ארטיב

הוכיח כי אם  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  כאשר  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$

אז 
$$\mu^*(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$
 ז"ל ארטיב

(א) פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  וקראת מובנת

אם  $f$  פשוט עולה  $f^{-1}(-\infty, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  קבוצה מובנת

(i) הוכיח כי אם  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מובנות

אז  $f \circ g$  פונקציה מובנת

(ii) הוכיח כי אם  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  פונקציות מובנות

$f_x(t) = t^{x-1} e^{-t}$   $f_x: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $x \in \mathbb{R}$   $x > 0$

(i) הוכח כי  $f_x$  אינטגרלית על  $(0, \infty)$

עבור  $x > 0$

$x > 0$   $\Gamma(x) = \int_0^\infty f_x(t) dt$

(ii) הוכח כי  $\int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy \rightarrow \Gamma(x)$  כ- $n \rightarrow \infty$

$$n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n y^{x-1} dy$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$$

(iii) הוכח כי  $\Gamma$  גזירה בהרציונל  $(0, \infty)$

2. יהיה  $I = [0, 1]$   $\mu$  מידת Lebesgue על  $I$   $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$   $(n \geq 1)$  מוגדרת

$$f_{2^n+k} = 2^n \chi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}$$
 כאשר  $0 \leq k \leq 2^n - 1, n \geq 0$

(א) הוכח כי  $f_n \xrightarrow{\mu} 0$   $f_n$  אינו מתכנס במובן  $L^1$

(ב) הוכח כי  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f_k \xrightarrow{\mu} 0$   $I$   $f$   $0$   $I$   $?$

יהיה  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  מרחב מדידה  $\sigma$ -סופי.

(א) הוכח כי עבור  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$  עבור  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

כך  $f \in L^p, g \in L^q, r \in (1, \infty)$   $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$   $\Rightarrow$  מתי  $e \in$  שוויון?

(ב) הוכח כי אם  $p \in [1, \infty)$   $f \in L^p$  אז

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \mu(|f| \geq x) = 0$$

4. יהיה  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  מרחב מדידה  $\mu(X) = 1$ ,  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$

כך  $e \dots \mu(A_m \cap A_n) = \mu(A_m) \mu(A_n)$  עבור  $m \neq n$ . הוכח כי

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \quad \text{אם} \quad \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$$

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1 \quad \text{אם} \quad \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \infty$$

5. יהיה  $\mu$  מדידת Lebesgue על  $\mathbb{R}$ .  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אי-גזרה יחסית.  $\nu: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$   $\nu(A) = \int_A f d\mu$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

(א) הוכח כי  $\nu$  היא  $\sigma$ -אדיטיבית  
(ב) הוכח כי  $\nu(A) \rightarrow 0$  כאשר  $A \rightarrow \emptyset$



פונקציות ממשיות  
מבחן מעבר לתלמידי מתמטיקה שנה ב' - ג'  
המורה: דר' י. אהרונסון

שד המבחן: שלוש שעות.  
הנחיות: ענה על שאלה מס' 1 ועוד שלוש שאלות ללא שימוש בכל חומר עזר.

א. המידה החיצונית של  $A \subseteq \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \text{קטעים } \{I_n\} \right\}$$

(כאן  $|I|$  מסמו האורך של הקטע  $I$ ).

הוכח כי:

(i)  $\mu^*(I) = |I|$  כאשר  $I$  קטע.

(ii)  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$  כאשר  $A, B \subseteq \mathbb{R}$

(iii)  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \setminus I)$  כאשר  $I, A \subseteq \mathbb{R}$  קטע.

(iv)  $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$  כאשר  $A, B \subseteq \mathbb{R}$

ב. פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת מדידה אם  $f^{-1}(-\infty, x)$

קבוצה מדידה לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכח כי:

(i) אם  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מדידות אזי

פונקציה מדידה. גם  $f+g$ .

(ii) אם  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה ולכל  $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ טאט } n \leftarrow \infty$$

אזי  $f$  היא פונקציה מדידה.



אוניברסיטת תל-אביב תל אביב יפו

פונקציה מדידה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת פשוטה אם

קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה סופית. אם  $f(\mathbb{R})$

מדידה בעלת מידה סופית, האנטגרל של הפונקציה הפשוטה  $f$  על  $A$  מוגדר ע"י

$$\int_A f d\mu = \sum_{y \in f(\mathbb{R})} y \mu(\{x: f(x)=y\} \cap A)$$

הוכח כי :

(i) אם  $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$  כאשר  $a_k \in \mathbb{R}$  קבי מדידה  $(1 \leq k \leq n)$  אזי  $f$  פונקציה פשוטה ו-

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap A)$$

(ii) אם  $(f_n)_{n \geq 1}$  פונקציות פשוטות שמתכנסות לפונקציה חסומה, במידה שווה על קבוצה מדידה  $A$  בעלת מידה סופית,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$
 אזי קיים הגבול

הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

- (i) אם  $A_n \subseteq [0, \infty)$ ,  $A_n \supseteq A_{n+1}$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$  אזי  $\mu^*(A_n) \downarrow 0$
- (ii) אם  $B_n \subseteq [0, \infty)$ ,  $B_n \supseteq B_{n+1}$ ,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0, \infty)$  אזי  $\mu^*(B_n) \uparrow 1$

(i) נניח כי  $A_n \subseteq [0, \infty)$  קבוצות כד ש-

הוכח כי  $\sum \mu^*(A_n) < \infty$  קיים  $x \in (0, \infty)$  הוכח כי לכמעט כל

$$q \geq q_0(x); p, q \in \mathbb{N} \quad \text{עבור} \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^2 (\log q)^2}$$



אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

(i) הוכח כי אם פונקציות מדידות  $f_n, f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$

כד ש:  $\int_0^1 |f_n|^2 d\mu \leq M$  קיים,  $f_n \xrightarrow{L^2} f$  על  $(0,1)$

אזי  $\int_0^1 |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

(ii) הוכח כי  $f_n \xrightarrow{L^2} f$  על  $(0,1)$  איננה גוררת

כי  $f_n \rightarrow f$  כיית על  $(0,1)$ .

(i) הוכח כי  $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_3 \|h\|_6$  עבור  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מדידות.

(ii) הוכח כי אם  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  אנטגרבילית על  $[0,1]$  אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 0$$

בהצלחה!!!

14988

מדידת אורך מישורית - מדידת אורך  
משטחיות - מדידת אורך

משפט הייני (המשפט השלישי)

המשפט השלישי: אם  $f$  היא פונקציה רציפה על  $[a, b]$  אז  $f$  היא משטחית ויש לה אורך מישורית.

(א) התיבה המישורית  $A \subseteq \mathbb{R}$  של  $\mu^*$  היא:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קטגוריה} \right\}$$

המשפט השלישי: אם  $f$  היא פונקציה רציפה על  $[a, b]$  אז  $f$  היא משטחית ויש לה אורך מישורית.

(i) הוכח: אם  $u \subseteq (0, 1)$  קטגוריה, אז  $\mu^*(u) < \frac{1}{16}$ .

$$\mu^*(u) < \frac{1}{16}, \quad u = [0, 1]$$

(ii) הוכח: אם  $A \subseteq \mathbb{R}$  קטגוריה, אז  $\mu^*(A \cap I) = \frac{99}{100} |I|$ .

$$\mu^*(A \cap I) = \frac{99}{100} |I|$$

(ג) הוכח: אם  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  מדידת אורך סובייטית.

הוכח: אם  $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  אז  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap B) \geq 0$ .

$$\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap B) \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap B) \geq 0$$

(ד) הוכח: אם  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, אז  $\mu(\{x \in [0, 1] : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{8}\}) < \frac{1}{8}$ .

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu\left(\left\{x \in [0, 1] : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{8}\right\}\right) < \frac{1}{8}$$



(2) הוכיח או הפרך :

$$\mu^*(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ז"כ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \quad A_n \supseteq A_{n+1}, \quad A_n \subseteq [0, 1] \quad \mu$$

(ii) הוכיח כי  $\mu$  כ"כ  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (וג"כ) סדר קצוות מקיף ומקביל  
כך  $e - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \leq 1$  ז"כ  $x \in [0, 1]$  ו"כ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq 1 - e$   
 $A$  כך  $\mu(A) > 3/4 - e$  וק"ו  $N \geq 1$  כך עבור  $x \in A$   $n \geq N$   
 $f_n(x) \leq 3/2$

(מקסימום של  $\mu$  על  $E_{\mu}$  מקיף ו"כ) (הוכיח או הפרך)

(3) (i) הוכיח או הפרך :

$$\mu^*(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{ז"כ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1], \quad A_n \subseteq A_{n+1}, \quad A_n \subseteq [0, 1] \quad \mu$$

(ii) האם יש  $\sigma$ -אלגברה אינסופית בת-מדידה?

(4) הוכיח כי  $\mu$  כ"כ  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  סדר קצוות מקיף ומקביל  
האם קיימת (a)  $\sup_n \int_0^1 f_n^2 < \infty$  (b)  $\int_0^1 f_n = 0$  עבור  $n \neq 1$

$$\int_0^1 f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ז"כ} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(5) (i) הוכיח כי  $\mu$  כ"כ  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרלית מן  $\mathbb{R}$  ז"כ  $\mathbb{R}$   
קבוצת קצוות  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(yx)f(x)}{1+x^2} dx$  היא גזירה ברציפות מן  $\mathbb{R}$

(ii) הוכיח כי  $\mu$  כ"כ  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  מרחב מדידה  $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$  סדר קצוות מקיף ומקביל ז"כ  
 $\|fgh\|_5 \leq \|f\|_{10} \|g\|_{15} \|h\|_{30}$

הוכיח!