מועד ב', סמסטר א', תשנ"ג
7.9.93

בחינת מעבר
אלגברה ב' 1
פרופ' מ. הרצוג

מס. תלמיד

חלק א'

משך הבחינה: 60 דקות. (לעולים חדשים 75 דקות)

אין להשתמש בחומר עזר וגם לא במחשבונים.

מספר השאלות: 15.

לכל שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.

סמן ☑ ליד התשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה	:	$6\frac{2}{3}$ נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת	:	0 נק'
תשובה לא נכונה	:	$-1\frac{1}{3}$ נק'

בהצלחה!

שאלה 1: מספר האינבולוציות ב-A_4 הוא:

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

שאלה 2: תהי G חבורה מסדר 120 ונניח כי חבורות סילו-5 של G אינן נורמליות ב-G. אזי n_5, מספר חבורות 5-סילו ב-G, שווה ל:

☐ 6 ☐ 12 ☐ 21 ☐ 24

שאלה 3: יהי $Z(G)$ המרכז של החבורה G ותהי G' חבורת הקומוטטור של G. אזי הטענה: $G/Z(G)$ אבלית

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $Z(G) \trianglelefteq G$.

☐ לא נכונה כאשר $Z(G) \trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר $G' \leq Z(G)$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

שאלה 4: יהיו $\alpha=(123)(45)$ ו- $\beta=(143)(25)$ איברי S_5. אזי הסדר של מכפלתם $\alpha\beta$ הוא:

☐ 2 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 6

<u>שאלה 5</u>: תהי T חבורה ציקלית מסדר $2^4\cdot 7^4$.
אזי מספר החבורות החלקיות של T הוא:

☐ 25 ___ ☐ 20 ___ ☐ 16 ___ ☐ 8

<u>שאלה 6</u>: תהי $G^2=\langle g^2 | g\in G\rangle$ ותת"ח של החבורה G הנוצרת ע"י רבועי איברי G ותהי $G^2 \le H \le G$.
אזי הטענה: $H \trianglelefteq G$

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $G'\le H$ (G' - חבורת קומוטטור).

☐ לא נכונה כאשר $G'\le H$, אבל נכונה כאשר $G'\le G^2$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל <u>אינן</u> נכונות. ___

<u>שאלה 7</u>: מספר האיברים מסדר 5 ב-S_5 הוא:

☐ 4 ___ ☐ 20 ___ ☐ 24 ___ ☐ 30

<u>שאלה 8</u>. תהי G חבורה, $Z(G)$ מרכזה. אזי הטענה: $Z(G)\neq 1$:

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר G חבורה סופית.

☐ לא נכונה כאשר G חבורה סופית, אבל נכונה אם $|G|=p^n>1$, p ראשוני.

☐ שלוש הטענות הנ"ל <u>אינן</u> נכונות. ___

שאלה 9: מספר מחלקות הצמידות של איברים מסדר ראשוני ב-S_5 הוא:

□ 2 __ □ 3 __ □ 4 __ □ 5

שאלה 10: תהיינה H ו-K חת"ח של החבורה הסופית G.
אזי הטענה: HK הינו חת"ח של G

□ נכונה תמיד.
□ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $H \trianglelefteq G$.
□ לא נכונה כש- $H \trianglelefteq G$, אבל נכונה כאשר גם H וגם K נורמליות ב-G.
□ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות. __

שאלה 11: מספר האיברים מסדר 4 בחבורה הדיהדרלית D_8 מסדר 16 הוא:

□ 1 __ □ 2 __ □ 5 __ □ 6

שאלה 12: תהי S קבוצה חלקית של החבורה G.
אזי הטענה: $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$

□ נכונה תמיד.
□ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם S חת"ח של G.
□ לא נכונה כאשר $S \leq G$, אבל נכונה אם S חת"ח אבלית של G.
□ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות. __

שאלה 13: תהי G חבורה מסדר $15m$, כאשר m הוא מספר טבעי זר ל-15, כלומר $(15,m)=1$. אזי הטענה: קיימת ב-G ת"ח מסדר 15 וכל שתי ת"ח מסדר 15 צמודות זו לזו

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם ת"ח 5-סילו של G נורמלית ב-G.

☐ לא נכונה כאשר ת"ח 5-סילו נורמלית ב-G, אבל נכונה אם גם ת"ח 5-סילו וגם ת"ח 3-סילו הן נורמליות ב-G.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

שאלה 14: תהי G חבורה סופית, $N,H \trianglelefteq G$ ונניח כי G/N, G/H הן חבורות ציקליות. אזי הטענה: G היא חבורה ציקלית

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה אם $N \cap H = 1$.

☐ לא נכונה כאשר $N \cap H = 1$, אבל נכונה אם $N \cap H = 1$ וגם $(|G/H|, |G/N|) = 1$.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

שאלה 15: תהי $H \leq G$. אזי הטענה: $C_G(H) \trianglelefteq G$

☐ נכונה תמיד.

☐ לא נכונה תמיד, אבל נכונה כאשר $H \trianglelefteq G$.

☐ לא נכונה כאשר $H \trianglelefteq G$, אבל נכונה אם $H \trianglelefteq G$ ו-H מסדר ראשוני.

☐ שלוש הטענות הנ"ל אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G$, $T \neq 1$ ציקלית. אזי $Z(G) \neq 1$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי.

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה G_1, G_2 חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח כי $N_1 \cong N_2$ וגם $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. אזי $G_1 \cong G_2$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G_1, G_2 הן חבורות אבליות.

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$ ו- G/N, G/H הן חבורות אבליות. אזי G הוא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|, |N|) = 1$

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G| = p^n$, כאשר p ראשוני ו- $2 \leq n$, אזי:

א) יתכן כי $|G'| = p^{n-1}$ (G' - חבורת הקומוטטורים של G).

ב) לא יתכן $|G'| = p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'| = p^{n-2}$.

ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ונניח כי $G/Z(G)$ הוא חבורה אבלית. אזי G היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. תהי S_n החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$ ונניח כי H מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n\geq 5$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

3. תהי $G=AB$, כאשר A ו-B הן ת"ח אבליות של G. אזי G היא אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ותהי P ת"ח p-סילו של G. אזי P/N היא ת"ח p-סילו של G/N

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N\leq P$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$ ואשר G' היא תת-חבורת הקומוטטור של G. אזי H אבלית

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית A_n יש תמיד ת"ח מאינדקס n

$\boxed{\text{שים לב: } A_1 = 1}$

א) נכון תמיד   ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \geq 3$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של S_4 הוא:

א) 4   ב) 5   ג) 6

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$ ונניח כי $C_G(a) \cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$ ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

מועד א׳, סמסטר ב׳.
15.7.90

אלגברה ב׳ 1

המורה: פרופ׳ מ. הרצוג

חלק ב׳.

משך חלק ב׳: 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נ׳,

ב) הגדר: ח״ח K ו- H של חבורה G צמודות זו לזו. (2 נ׳,

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ח״ח p-סילו צמודות זו לזו. (20 נ׳)

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n \geq 3$, $A_n = \langle (1 2 k) \mid k=3,4,\dots,n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n \geq 3$, ו- H מכילה מחזור τ מאורך 3 אזי $H = A_n$.

שאלה 3.

הוכח כי חבורה מסדר pq, p ראשוני, אינה חבורה פשוטה

שאלה 4.

הוכח כי למשוואה $x^2ax=a^{-1}$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם a הוא חזקה שלישית של איבר ב- G.

בהצלחה!

מועד ב', סמסטר ב', תש"ן

17.9.90

מס. תלמיד

אלגברה ג' 1

פרופ' מ. הרצוג

חלק ג'

משך חלק ג': 2 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר.

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נק').

ב) נסח את משפט קושי לחבורות אבליות. (2 נק').

ג) הוכח: אם p ראשוני ואם G חבורה סופית, אזי G מכילה לפחות חבורת p-סילו אחת. (20 נק')

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n\geq 3$, $A_n=\langle (12k)\mid k=3,4,\dots,n\rangle$. (10 נק')

ב) הוכח: אם $H\trianglelefteq A_n$, $n\geq 3$ ו-H מכילה מעגל מאורך 3, אזי $H=A_n$. (15 נק')

שאלה 3.

הוכח שכל חבורה מסדר 255 הוא אבלית.

[רמז: $|G|=255=17\cdot 5\cdot 3$. תהיינה $H,K,L\leq G$ מסדרים 17,5,3 בהתאמה. הוכח: $H\lhd G$ והסק $G'<H$. הוכח גם ש-$K\lhd G$ או $L\lhd G$ והסק: $G'=1$]

שאלה 4.

הוכח שלמשוואה $xax=b$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם ab הוא ריבוע של איבר של G.

1. תהי G חבורה ותהיינה $K,H \le G$ המקיימות: $K \le H$. אזי:

א) $N_G(K) \le N_G(H)$ ב) $N_G(H) \le N_G(K)$

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

2. תהי S קבוצה חלקית של החבורה G. אזי:

$$C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$$

א) נכון תמיד; ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם S חבורה חלקית.

ג) טענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית ותהי $1 \lneq N \trianglelefteq G$.

אזי: $N \cap Z(G) \gneq 1$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, p וכו'

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

---

4. יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם על).

אזי:

א) ל-G יותר חבורות מנה האיזומורפיות ל-H;

ב) ל-G יותר ת"ח האיזומורפיות ל-H;

ג) הטענות א' ו ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית, $H \le G$ ותהי P ת"ח p-סילו של G. אזי $P\cap H$ היא ת"ח p-סילו של H.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אלא נכון כאשר $H \trianglelefteq G$

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

2. יהיו נתונים התמורות: $\alpha=(15)(473)(26)$, $\beta=(16)(267)(34)$ ו-$\gamma=(17)(5362)$ ב-S_7. אזי:

א) α צמודה ל-β ב-S_7; ב) β צמודה ל-γ ב-S_7.

ג) α צמודה ל-γ ב-S_7.

3. תהי G חבורה סופית פשוטה ותהי $H\le G$ בעלת האינדקס: $|G:H|=5$. אזי: $G\cong A_5$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד; נכון רק אם $|H|=12$

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

4. תהי $H\le G$ ונניח כי $g^2\in H$ לכל G.

אזי:

א) G/H היא אבלית ב) G/H איננה תמיד אבלית, אלא G/H אבל

ג) התשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית, $H\le G$ ונניח כי $H\cap G'=1$,
כאשר G' היא חבורת הקומוטטורים של G. אזי H אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) התשובות א' ! ב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה סופית ונניח כי $G\cong \mathrm{Inn}\,G$. אזי G אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G מסדר p^n, p ראשוני.

ג) התשובות א' ! ב' אינן נכונות...

---

3. תהי G חבורה סופית ותהי $G=FK$ כאשר $K\le G$
! $F\trianglelefteq G$. אזי: $F\cap K\trianglelefteq G$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר F אבלית

ג) התשובות א' ! ב' אינן נכונות.

---

4. מספר האיברים הצמודים של $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$, מחזור
מאורך n ב-S_n, הוא:

א) 3^n ב) $n!$ ג) $(n-1)!$

1. תהי T חבורה ציקלית מסדר $2^n 3^m$
אזי מספר החבורות החלקיות של T הוא:

א) $6nm$ ב) nm ג) $(n+1)(m+1)$

---

2. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$, ו- G/N, G/H חבורות ציקליות. אזי G היא חבורה ציקלית

א) נכון תמיד;

ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|G/N|, |G/H|)=1$

ג) א' ו- ב' אינם נכונים.

---

3. תהי G חבורה מסדר p^n, p ראשוני ונניח כי $|G/Z(G)|=p^2$. אזי G/G' איננה ציקלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n \le 4$;

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

---

4. תהי S קבוצה חלקית של החבורה G. אזי:

א) $C_G(C_G(S)) \le S$ ב) $C_G(C_G(S)) \ge S$

ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', תש"ן
15.7.90

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק א'.

משך חלק א': 60 דקות.

אין להשתמש בכל חומר עזר.

מספר השאלות: 16.

לכל שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.
סמן עיגול סביב האות א', ב', או ג' המתאימה לתשובה הנכונה.

ניקוד:

תשובה נכונה: 3.25 נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'
תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$ ובעלות ת"ח. כולן אינן לפחות 3 ציקליות הוא:

א) 5 ב) 6 ג) 7

---

2. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^n$, כאשר p ראשוני ו- $n\ge 1$. תהי C מחלקת צמידות (של איברים) של G. אזי $|C|<p^{n-1}$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n>1$

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

3. תהי G חבורה סופית מסדר $|G|=p^r m$, כאשר p ראשוני, $(p,m)=1$. נניח כי $p \mid |Z(G)|$ ותהי C מחלקת צמידות (של איברים) ב-G. אזי $p^r \nmid |C|$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם ת"ח p-סילו של G היא אבלית

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית ותהי $H\le G$. אם $a\in G$ ואם $a^2\in H$, אזי G היא בעלת סדר זוגי.

א) נכון תמיד. ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $|G|=p^n$, p ראשוני

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $T \trianglelefteq G$, $T \neq 1$ ציקלית.
אזי $Z(G) \neq 1$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $|T|$ מספר זוגי
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה G_1, G_2 חבורות סופיות, $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_2 \trianglelefteq G_2$ ונניח
כי $N_1 \cong N_2$ וגם $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. אזי $G_1 \cong G_2$

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר G_1, G_2 הן חבורות אבליות
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית, $N, H \trianglelefteq G$ ו- G/N, G/H
הן חבורות אבליות: אזי G הוא חבורה אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|N|)=1$
ג) הטענות א', ב' אינן נכונות.

---

4. אם $|G|=p^n$, כאשר p ראשוני ו- $2 \le n$, אזי:
א) יתכן כי $|G'|=p^{n-1}$ (G' - חבורת הקומוטטורים של G).
ב) לא יתכן $|G'|=p^{n-1}$, אבל יתכן כי $|G'|=p^{n-2}$.
ג) הטענות א' ו- ב' אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית ונניח כי $G/Z(G)$ הינה חבורה אבלית. אזי G היא חבורה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $G/Z(G)$ ציקלית
ג) הטענות א׳ וב׳ אינן נכונות

---

2. תהי S_n החבורה הסימטרית, $H \trianglelefteq S_n$ ונניח כי H מכילה מעגל מאורך 4. אזי $H=S_n$.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון אם $n\geq 5$
ג) הטענות א׳ וב׳ אינן נכונות.

---

3. תהי $G=AB$, כאשר A ו-B הן ת"ח אבליות של G. אזי G הינה אבלית.

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|A|,|B|)=1$
ג) הטענות א׳ וב׳ אינן נכונות

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$ ותהי P ת"ח p-סילו של G. אזי P/N הינה ת"ח p-סילו של G/N

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $N\leq P$
ג) הטענות א׳ וב׳ אינן נכונות

1. תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ ונניח כי $H \cap G' = 1$
ואשר G' הוא חבורת הקומוטטור של G. אזי H אבלית

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $(|H|,|G'|)=1$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות

---

2. לחבורה האלטרנטיבית A_n וישנה תמיד ת"ח מאינדקס n

א) נכון תמיד ב) לא נכון תמיד, אבל נכון כאשר $n \geq 3$

שים לב: $A_1 = 1$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות

---

3. מספר מחלקות הצמידות (של איברים) של S_4 הוא:

א) 4 ב) 5 ג) 6

---

4. תהי G חבורה סופית, $N \trianglelefteq G$, $a \in G$
ונניח כי $C_G(a) \cap N = 1$. אזי:

א) $|C_{G/N}(aN)| < |C_G(a)|$ ב) $|C_{G/N}(aN)| > |C_G(a)|$

ג) הטענה א' וב' אינן נכונות.

מועד א', סמסטר ב', ת

15.7.90

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ב'.

משך חלק ב': 2 שעות. אין להשתמש בכל חמר עזר

שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית. (3 נ'

ב) הגדר: ת"ח K ו- H של חבורה G צמודות זו לזו. (2 נ'

ג) הוכח: בחבורה סופית, כל ת"ח p-סילו צמודות זו לזו. (20

שאלה 2.

א) הוכח: עבור $n \geq 3$, $A_n = \langle (12k) \mid k=3,4,\ldots,n \rangle$

ב) הוכח: אם $H \trianglelefteq A_n$, $n \geq 3$ ו- H מכילה מחזור מאורך 3 אזי $H = A_n$.

שאלה 3.

הוכח כי חבורה מסדר $15p$, p ראשוני, אינה חבורה פשוטה

שאלה 4.

הוכח כי למשוואה $x^2ax=a^{-1}$ יש פתרון x בחבורה G אם ורק אם a הוא חזקה שלישית של איבר ב- G.

בהצלחה!

[illegible]

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק א'

חלק א': 60 דקות.
להשתמש בכל חומר עזר.
השאלות: 16.
שאלה ישנה תשובה נכונה אחת ויחידה.
עגול סביב האות א', ב' או ג' המתאימה
ה הנכונה.

3/ק'

תשובה נכונה: 3.25 נק'
אין תשובה או יותר מתשובה אחת: 0 נק'
תשובה לא נכונה: -0.75 נק'

בהצלחה!

1. תהי G חבורה בעלת המרכז $Z(G)$ ותהי $H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $Z(G/H) \le Z(G)/H$ (המרכז של G/H)

ב) $Z(G/H) \le Z(G)H/H$

ג) $Z(G/H) \ge Z(G)H/H$

---

2. יהיו נתונים התמורות: $\alpha=(15)(473)(26)$, $\beta=(16)(267)(34)$

! $\gamma=(17)(5362)$ ב-S_7. אזי:

א) α צמוד ל-β ב-S_7.

ב) β צמוד ל-γ ב S_7.

ג) α צמוד ל γ ב S_7.

---

3. תהי G' חבורת הקומוטטור של G. אזי:

א) $Z(G/G') \lneq G/G'$ (המרכז של G/G')

ב) $Z(G/G') = G/G'$

ג) $Z(G/G') \gneq G/G'$

---

4. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^3\cdot 3^2\cdot 7^3$ ובעלות חבורת 2-סילו ציקלית הוא:

א) 18

ב) 6

ג) 9

1. יהיו נתונים האיברים $\alpha=(12)(437)(56)$, $\beta=(74)(125)(36)$ ו-

$\gamma=(13264)(57)$ ב-S_7. אזי:

א) γ מצמיד את α ל-β : $\alpha^{\gamma}=\beta$.

ב) γ מצמיד את β ל-α : $\beta^{\gamma}=\alpha$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה ותהיינה $K,H\le G$ המקיימות: $K\le H$

אזי:

א) $N_G(K)\le N_G(H)$

ב) $N_G(H)\le N_G(K)$

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

3. מספר האיברים הצמודים של $(1\,2\,3\ldots n)$

ב-S_n הוא:

א) $(n-1)!$

ב) $(n-2)!$

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

4. תהי G חבורה סופית ותהי $H\le G$ בעלת

האינדקס $|G:H|=n$. אזי:

א) $|G|$ מחלק את $n!$.

ב) $n!$ מחלק את $|G|$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

1. תהי G חבורה סופית ותהי $P\in Syl_p(G)$.
נניח כי $N_G(P)\trianglelefteq G$. אזי:

א) $N_G(P)=G$

ב) $|G:N_G(P)|=1+p$

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות

---

2. תהי $G=A_1\times A_2\times\dots\times A_r$ מכפלה ישרה של $r>1$,
חבורות ציקליות מסדר ראשוני p. תהי $H\le G$
בעלת הסדר p. אזי:

א) $H=A_i$ עבור i מתאים.

ב) $H\le A_i\times A_j$ עבור i,j שונים מתאימים.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

3. תהי G חבורה סופית ויהי T אוטומורפיזם של G
ללא נקודות שבת. נניח כי $o(T)=2$. אזי:

א) $T(x)=x^2$ לכל $x\in G$.

ב) $T(x)=x^{-1}$ לכל $x\in G$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. אם לחבורה הסימטרית S_n יש מאינדקס 4
ת"ח נורמלית ואזי:

א) $n=3$

ב) $n=4$

ג) $n=5$

1. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות סופיות. אזי:

א) $G = (\mathrm{Im} f)(\ker f)$.

ב) $|G| = |\mathrm{Im} f|\,|\ker f|$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

2. תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי $G/N\cap M$ היא אבלית. אזי:

א) G/N, G/M הן חבורות אבליות.

ב) G/N ו- G/M הן חבורות אבליות רק אם $N \neq M$.

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

3. מספר האיברים מסדר 2 בחבורת הקווטרניונים Q מסדר 8 הוא:

א) 3

ב) 5

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. תהי G חבורה סופית ותהיינה $H \leq G$ ו- $P \in Syl_p(G)$. נניח כי $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. אזי:

א) $P \trianglelefteq G$.

ב) $P \trianglelefteq G$ רק אם $H \text{ char } G$.

ג) $P \trianglelefteq G$ רק אם H אבלית.

מועד א', סמסטר ב', תשמ"ט
4.7.89

אלגברה ב' 1

המורה: פרופ' מ. הרצוג

חלק ג'

משך חלק ג': 2 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
יש לענות: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 3,4

שאלה 1.

הוכח את משפט קושי למקרה של חבורות אבליות: אם G חבורה אבלית ו-p ראשוני המחלק את $|G|$, אזי קיים לפחות איבר a ב-G בעל הסדר p: $o(a) = p$.
(הערה: אין להשתמש במשפט המבנה של חבורות אבליות סופיות)

שאלה 2.

תהי G חבורה ותהי H ת"ח של G בעלת האינדקס הסופי: $|G:H|=n$.
הוכח: קיימת $K \trianglelefteq G$ כך ש: G/K איזומורפית לת"ח של S_n (החבורה הסימטרית).

שאלה 3.

הוכח כי אין חבורה פשוטה בעלת הסדר $77p$, כאשר p מספר ראשוני.

שאלה 4.

(א) נסמן ע"י G' את חבורת הקומוטטור של G. הוכח:
לכל קוסט $G'x$, $x \in G$, הנו איחוד של מחלקות צמידות של איברי G.

(ב) תהי G חבורה סופית לא אבלית, אזי $k(G) =$ מספר מחלקות הצמידות של איברי G, מקיים את אי-השוויון:

$$k(G) \geq |G:G'| + 1$$

בהצלחה!

מועד ב׳, סמסטר ג׳, תש״ן
24.9.89

אלגברה ג׳ 1

המורה: פרופ׳ מ. הרצוג

חלק ג׳

משך חלק ג׳: 2 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
שים לב: ענה על 2 שאלות: אחת משאלות 1,2 ואחת משאלות 4

שאלה 1.

א) הגדר את המושג: חבורת p-סילו של חבורה סופית.

ב) הוכח: כל חבורה סופית G מכילה לפחות חבורת p-סילו אחת לכל מספר ראשוני p.

(הערה: עליך לנסח את משפטי העזר בהם הנך משתמש ולא רק לקרוא להם בשם המתאים)

שאלה 2.

תהי G חבורה ותהי $N \trianglelefteq G$. הוכח:

$$\{\text{כל החי״ח של } G/N\} = \{H/N \mid N \leq H \leq G\}.$$

שאלה 3.

תהי G חבורה סופית מסדר $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, p_i ראשוניים שונים ותהיינה K, H ת״ח של G. הוכח:

א) (10 נק׳) אם לכל $i=1,\dots,k$ מתקיים: או $p_i^{r_i} \mid |H|$ או $p_i^{r_i} \mid |K|$, אזי $G=HK$.

ב) (15 נק׳) אם $(|G:H|, |G:K|)=1$ (כלומר האינדקסים זרים זה לזה) אזי $G=HK$.

שאלה 4.

תהי G חבורה מסדר $231 = 3\cdot 7\cdot 11$ ותהיינה $A \in Syl_{11}(G)$, $\in Syl_7(G)$, $C \in Syl_3(G)$. הוכח:

א) (5 נק׳) $A \triangleleft G$.

ב) (10 נק׳) AB, AC הן ת״ח אבליות של G.

ג) (10 נק׳) A מוכלת במרכז $Z(G)$ של G.

בהצלחה!

1. תהי G חבורה סופית מסדר n ותהי $\trianglelefteq G$ ציקלית מסדר m. אזי:

א) ל-G יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את m

ב) ל-G יש ת"ח נורמלית מכל סדר המחלק את n/m

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

2. מספר החבורות האבליות בעלות הסדר $2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$ ובעלות ת"ח ציקליות מאינדקס ראשוני הוא:

א) 3.

ב) 4.

ג) 6.

---

3. מספר האיברים הצמודים של (12) ב-S_n הוא:

א) 2^n.

ב) $n(n-1)$.

ג) $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

4. תהי G חבורה מסדר $|G|=pm$, $(p,m)=1$ ותהי $P\in Syl_p(G)$. נניח כי $P\ntrianglelefteq G$! $m\equiv 1 \pmod p$.
אזי:

א) $N_G(P)=P$.

ב) $N_G(P)\supsetneq P$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

1. תהי T ת"ח ציקלית נורמלית של החב' הסופית הלא-אבלית G. אזי:

א) $C_G(T) = T$.

ב) $C_G(T) \supsetneq T$.

ג) $C_G(T) \le T$ ולכן תמיד $C_G(T) = T$;

---

2. מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורת הקווטרניונים Q מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

3. יהי $f: G \to H$ אפימורפיזם של חבורות (הומומורפיזם

אזי:

א) ל-G יש חבורת מנה האיזומורפית ל-H

ב) ל-G יש ת"ח האיזומורפית ל-H;

ג) הטענות א' וב' אינן נכונות.

---

4. תהיינה $N, M \trianglelefteq G$ ונניח כי G/N ו-G/M הן חבורות סופיות. אזי:

א) G הוא סופית.

ב) אם $M \cap N$ הוא סופית, אז G הוא סופית

1. תהי $G' \le A \le G$ ותהי $H \le G$. אזי:

א) $HA = G$.

ב) $HA \trianglelefteq G$ ויתכן $HA < G$. ($\trianglelefteq$ פירושו ת"נ)

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

2. תהי G חבורה סופית ותהי $P \in Syl_p(G)$. אזי:

א) $N_G(N_G(P)) = G$.

ב) $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

3. תהיינה H ו-K ת"ח של G ונניח כי $K \le H$. אזי:

א) $Z(K) \le Z(H)$.

ב) $C_G(K) \le C_G(H)$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

---

4. לחבורה הסימטרית S_n:

א) יש ת"ח מכל אינדקס בצורה:

$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r)$, $0 \le r \le n-1$

ב) יש ת"ח מכל אינדקס המחלק את $n!$.

ג) הטענות א' ו-ב' אינן נכונות.

1. תהי $N \trianglelefteq G$ ונניח כי N הוא לא-אבלית. אזי:

א) קיימת K, $1<K<N$ המקיימת: $K \triangleleft G$.

ב) אם $N \neq N'$ אזי קיימת K, $1<K<N$ המקיימת: $K \triangleleft G$.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות:

---

2. מספר החבורות החלקיות מסדר 4 בחבורה הדיהדרית D_8 מסדר 8 הוא:

א) 1.

ב) 2.

ג) 3.

---

3. תהיינה A,B ת"ח אבליות של G ונניח כי $G=AB$. אזי:

א) G הוא אבלית.

ב) אם $A \cap B \neq 1$, אזי G הנה אבלית.

ג) הטענות א' ! ב' אינן נכונות.

---

4. תהי $R \trianglelefteq G$ ותהי $R \leq K \leq G$. אזי:

א) $N_{G/R}(K/R) \leq N_G(K)/R$

ב) $N_{G/R}(K/R) \leq \frac{N_G(K)R}{R}$

ג) $N_{G/R}(K/R) \geq \frac{N_G(K)R}{R}$