שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

נתונים אינטגרל אמיתי ואינטגרל לא אמיתי:

$$\int_0^{\pi} \tan\left(\frac{x}{3}\right) dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

א. חשב את האינטגרל האמיתי

ב. בדוק האם האינטגרל הלא אמיתי מתכנס

פתרון

א. הפונקציה $\tan(x)$ רציפה ותחומה בקטע הסגור $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ לכן קיים אינטגרל רימן $\int_0^{\pi} \tan\left(\frac{x}{3}\right) dx$.

$$\int_0^{\pi} \tan\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos\left(\frac{x}{3}\right)} dx = \left[-3\ln \cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= (-3)\left(\ln(0.5) - \ln(1)\right) = -3 \cdot \ln(0.5) = 3 \cdot \ln(2)$$

ב. מתקיים $\lim_{x \to \pi} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$. על פי כלל לופיטל מתקיים

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

האינטגרל $\int_a^{\pi} \frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}} dx$ לא מתכנס עבור כל $a < \pi$, לכן לפי מבחן המנה גם האינטגרל $\int_0^{\pi} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$ לא מתכנס (שבהם אינטגרלים של פונקציות חיוביות שהיחס קיים שונה מאפס).

שאלה (מדהימה של פרופ' אהרונסון)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם $f:(a,b)\longrightarrow R_+=(0,\infty)$ רציפה במ"ש ב-(a,b)

אז גם $\frac{1}{f}$ רציפה במ"ש ב-(a,b).

פתרון

נפריך את הטענה

נשתמש בפונקציה $f(x)=x$ עבור $0<x<\infty$.

הטווח של הפונקציה הוא $(0,\infty)$ (כאשר המקור הוא $(0,\infty)$). הפונקציה רציפה במידה שווה כי עבור כל x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\varepsilon$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ (ה-ε משמש גם כ-δ בקריטריון לרציפות במידה שווה).

הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה רציפה במידה שווה: הגבול שלה כאשר $x\to 0$ מימין הוא $+\infty$. עבור כל $\delta>0$ מתקיים שבקטע $(0,\delta)$ מתקבלים כל הערכים שגדולים מ-$\frac{1}{\delta}$. כך למשל מתקבלים גם הערך $\frac{1}{\delta}+1$ וגם הערך $\frac{1}{\delta}+2$. לכן עבור $\varepsilon=1$ לא קיים δ כך שאם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|<1$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' פישפלד)

נתון שבמלבן $0<x<1$, $0<y<1$ מתקיים $|f'_x(x,y)|\le M$ ו $|f'_y(x,y)|\le M$! הוכח כי הפונקציה רציפה במידה שווה במלבן.

פתרון

נראה שעבור כל $\varepsilon>0$ קיימים δ_1, δ_2 המתאימים ל ε כך שעבור כל x_1,y_1,x_2,y_2 המקיימים $|x_1-x_2|\le\delta_1$, $|y_1-y_2|\le\delta_2$ מתקיים $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\varepsilon$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| = |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)+f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|+|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|$$

נסתכל על $f(x,y_1)$ כפונקציה של x כאשר y_1 הוא קבוע. מכיון ש (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) הן נקודות פנימיות למלבן אז לא רק שהפונקציה $f(x,y_1)$ גזירה בקטע הפתוח (x_1,x_2) אלא שהיא גם רציפה בקטע הסגור $[x_1,x_2]$. לכן מתקיימים תנאי משפט לגרנז' וקיימת נקודה פנימית x שהיא בין x_1 ו x_2 כך ש $f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)=f'_x(x,y_1)\cdot(x_2-x_1)$. מכיון ש $f'_x(x,y_1)\le M$ אז $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|\le M|x_1-x_2|$

באופן דומה מתקיים $|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|y_1-y_2|$.

נבחר $\delta_1, \delta_2=\frac{\varepsilon}{2M}$ ונקבל עבור כל $|x_1-x_2|\le\frac{\varepsilon}{2M}$, $|y_1-y_2|\le\frac{\varepsilon}{2M}$ ש $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\varepsilon$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סולומיאק)

הוכח כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n)}{x^n}$ מתכנס במ"ש במידה שווה בקטע $(2,\infty)$. נסמן את הסכום ע"י $f(x)$.

האם מתכנס $\int_2^{\infty} f(x)dx$?

פתרון

נראה שעבור כל ε נתון קיים N כך שהזנב החל מהמקום ה-N קטן מ-ε עבור כל x בקרן.

עבור x קבוע הזנב של הטור החל מהמקום ה-N שווה ל- $\sum_{n=N}\frac{\sin(n)}{x^n}$. זה לא גדול מסכום הערכים המוחלטים שקטן מ- $\sum_{n=N}\frac{1}{x^n}$: עבור x קבוע זה טור גיאומטרי שמסתכם ל- $\frac{\frac{1}{x^N}}{1-\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x^N}$ הוא מונוטוני יורד בקרן ומקבל ערך מקסימלי עבור $x=2$. לכן הזנב של הטור לא גדול מ- $2^{-N}=\frac{1}{2^N}$,

נבחר $N\ge\frac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(0,5)}$ ונקבל שהזנב קטן אפילו מ-ε.

נראה $\int_2^{\infty} f(x)dx$ מתכנס: הטור של הערכים המוחלטים הוא $\sum_{n=2}\left|\frac{\sin(n)}{x^n}\right|$ מתקיים $\left|\frac{\sin(n)}{x^n}\right|\le\frac{1}{x^n}$

מתקיים $\sum_{n=2}\frac{1}{x^n}=\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\le\frac{2}{x^2}$. מתקיים $\int_2^{\infty}\frac{2}{x^2}dx<\infty$

לכן על-פי מבחן ההשוואה גם $\int_2^{\infty} f(x)<\infty$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' הירשפלד)

נתונה סדרת פונקציות f_n המתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע (a,b). הוכח שאם כל אחת מהפונקציות בסדרה רציפה <u>במידה שווה</u> בקטע הרי f רציפה במידה שווה.

פתרון

מכיון שסדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע לפונקציה f אז עבור כל ε קיים n כך ש: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ עבור כל x בקטע. מכיון שעבור n זה הפונקציה רציפה במידה שווה בקטע אז קיים $\delta>0$ כך שעבור כל x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

עבור x_1,x_2 המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(x_1)-f_n(x_1)+f_n(x_1)-f_n(x_2)+f_n(x_2)-f(x_2)| \overset{*}{\le} |f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

* א' שוויון המשולש

שאלה (מבחינה של פרופ' אהרונסון)

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\cdot x^n$

פתרון

מתקיים
$$\binom{3(n+1)}{n+1}\Big/\binom{3n}{n}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}$$

ויחס זה שואף ל $\frac{27}{4}$ לכן עבור $x>\frac{4}{27}$ הערכים של $\binom{3n}{n}\cdot x^n$ לא שואפים לאפס כאשר $n\to\infty$ והטור הנ"ל לא מתכנס. עבור $x<\frac{4}{27}$ מתקיים $\frac{\binom{3(n+1)}{n+1}\cdot x^{n+1}}{\binom{3n}{n}\cdot x^n}<1$ ועל-פי מבחן דלמבר הטור מתכנס.

לכן רדיוס ההתכנסות הנו $\frac{4}{27}$.

שלומי

שאלה (מקמ"נה של פרופ' אהרונסון)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

נגדיר עבור $n\geq 1$ פונקציות $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $f_n(x)=\frac{nx^2}{nx^2+1}$,
אזי קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$
במ"ש ב- $[-1,1]$.

פתרון

נפריך את הטענה.

מתקיים $\frac{nx^2}{nx^2+1} = \frac{nx^2+1}{nx^2+1} - \frac{1}{n^2x^2+1} = 1-\frac{1}{n^2x^2+1}$

עבור כל $x\neq 0$ קבוע זה מתקיים
$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^2x^2+1} = 1$. עבור n קבוע נסתכל על ערך הפונקציה בנקודה $x=\frac{1}{n}$. בנקודה $x=\frac{1}{n}$ ערך הפונקציה $f_n(x)$ הוא $1-\frac{1}{n^2(\frac{1}{n})^2+1}$. עבור כל n ביטוי זה שווה ל 0.5. לכן אין שאיפה במ"ש לפונקציה ששווה ל 1 שהוא הגבול עבור $x\neq 0$ קבוע..

שאלה (מקמ"נה של פרופ' הירשפלד)

הוכח שסדרת הפונקציות $f_n(x)=\log_n x$ $(n>1)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[e^{-1},e]$

פתרון:

נראה שסדרת הפונקציות שואפת במידה שווה לאפס בקטע זה. $\log_n(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(n)}$, הפונקציה $\ln(x)$ היא רציפה בקטע $[e^{-1},e]$ ועולה נגזרת חיובית בכל הקטע לכן היא מקבלת ערך מקסימלי בקטע עבור $x=e$, לכן עבור כל $e^{-1}\leq x\leq e$ מתקיים $f_n(x)\leq\frac{\ln(e)}{\ln(n)}=\frac{1}{\ln(n)}$. עבור $\varepsilon>0$ מתקיים עבור $n\geq e^{\frac{1}{\varepsilon}}$: $\frac{1}{\ln(n)}\leq\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

שלומי