ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תש"ע , מועד

תאריך:

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: רני הוד, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים. על האלגוריתם להיות דטרמיניסטי, אלא אם צוין אחרת.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1		
2		
3		
4		
5		

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ המיוצג ע"י רשימות שכנות. קבוצת צמתים $U \subseteq V$ נקראת ***סגורה*** אם אין קשת מכוונת מ־U אל $V \setminus U$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא קבוצה סגורה בעלת מספר איברים קטן ביותר (אך לא ריקה).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

יהיו $T=(V,A')$ ו־$T'=(V,A)$ זוג עצים פורשים מינימאליים שונים בגרף קשיר, לא מכוון וממושקל $G=(V,E)$. הוכיחו שבכל מעגל של הגרף $(V,A\cup A')$ ישנן שתי קשתות שונות בעלות אותו משקל.

הוכחה:

שאלה 3

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ עם משקל ממשי $w(e)$ עבור כל קשת $e \in E$, ומקור $s \in V$ כך שקיימת מסילה מכוונת מ־s לכל צומת $v \in V$. בנוסף, ידוע שאין ב־G מעגלים שליליים. לכל $v \in V$, נסמן ב־$\delta(s, v)$ את המשקל הקטן ביותר של מסילה מכוונת מ־s אל v, ולכל קשת $(u, v) \in E$ נגדיר $w^*(u, v) = w(u, v) + \delta(s, u) - \delta(s, v)$.

סעיף א'

הוכיחו כי $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$ לכל קשת $(u, v) \in E$, והסיקו כי $w^*(u, v) \geq 0$.

הוכחה:

סעיף ב'

תארו ונמקו תנאי הכרחי ומספיק לכך שעבור קשת (u, v) מתקיים $w^*(u, v) = 0$.

<u>תנאי:</u> $w^*(u, v) = 0$ אם ורק אם

<u>הסבר:</u>

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 4

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הקובע אם בגרף מכוון $G = (V, E)$ קיים תת גרף פורש (כלומר, תת גרף (V, E') כך ש-$E' \subseteq E$) שבו כל דרגת כניסה וכל דרגת יציאה היא בדיוק 2.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

סעיף א'

נתון גרף דו־צדדי $G = (V,E)$ בעל n צמתים בכל צד. תארו אלגוריתם (דטרמיניסטי) יעיל ככל האפשר שיקבע האם ל־G מספר אי זוגי של זיווגים מושלמים.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב'

נתון גרף דו־צדדי $G = (V,E)$ בעל n צמתים בכל צד. בנוסף, נתונה פונקציית משקל w כך ש־$w(e) \in \{1,2,3,4\}$ עבור כל קשת $e \in E$. תארו אלגוריתם הסתברותי יעיל ככל האפשר שיקבע האם יש בגרף זיווג מושלם שסכום משקלי קשתותיו בדיוק $2n$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר: