ת.ז.: ______________   מס' מחברת: ______

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תשע"א , מועד א'

תאריך: 23.06.2011

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' יוסי עזר, פרופ' רון שמיר

מתרגלים: רני הוד, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפות שלוש מסגרות נוספות, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1		
2		
3		
4		
5		

שאלה 1

סעיף א׳ (50% מניקוד השאלה)

נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w:E\rightarrow\mathbb{R}$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלגוריתם למציאת המסלול הקל ביותר בגרף $p:u\rightsquigarrow v$ ביחס למשקל w. שימו לב: (1) הצמתים u,v אינם נתונים; (2) ייתכן כי $u=v$ והמסלול p ריק; (3) המסלול p לאו דווקא פשוט - ניתן לחזור על צמתים ו/או קשתות.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב' (50% מניקוד השאלה)

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w : E \to \mathbb{R}$, וקשת $e \in E$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלגוריתם יעיל למציאת המסלול הקל ביותר בגרף מבין המסלולים העוברים דרך הקשת e. המסלול עשוי לבקר יותר מפעם אחת בצמתים ו/או קשתות.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

שאלה 2

נתונים גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל[1] על הקשתות $w : E \to \mathbb{R}$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת־גרף פורש[2] וקשיר $G' = (V, E')$ שסכום משקלי הקשתות שבו מינימלי.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

[1] כלומר, ייתכנו גם משקלים חיוביים וגם משקלים שליליים.

[2] תת גרף פורש הינו גרף המכיל את כל הקודקודים של הגרף המקורי ותת קבוצה של הקשתות. כלומר, $E' \subseteq E$.

שאלה 3

סעיף א' (25% מניקוד השאלה)

כחלק מאלגוריתם KMP, מחושבים ערכי פונקציית הרישא π של התבנית $P = P[1], P[2], ..., P[m]$.
רישמו את ההגדרה של פונקציית π (כלומר, מהי המשמעות של $\pi[j]$).

הגדרה:

סעיף ב' (75% מניקוד השאלה)

להלן האלגוריתם לחישוב פונקציית π שראינו בשיעור. הוכיחו שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(m)$. **בשאלה זו אסור להניח דברים שנלמדו בשיעור.**

```
COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P)
m ← length[P]
π[1] ← 0
k ← 0
for j ← 2 to m
   do while k > 0 and P[k + 1] ≠ P[j]
         do k ← π[k]
      if P[k + 1] = P[j]
         then k ← k + 1
      π[j] ← k
return π
```

הוכחה:

שאלה 4

נתונים רשת זרימה מכוונת $G=(V,E)$ עם קיבולים <u>שלמים</u> $C:E\to\mathbb{N}$, זוג צמתים $s,t\in V$ וזרימה מקסימלית שלמה[3] f מ־s אל t. מגדילים ב־1 את הקיבול של שבע מקשתות הרשת $e_1,...,e_7\in E$, ומקטינים ב־1 את הקיבול של קשת שמינית $e_8\in E$ (כל שמונה הקשתות שונות, והקיבול של e_8 ברשת המקורית חיובי). תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה מקסימלית מ־s אל t ברשת החדשה.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

[3] תזכורת - זרימה שלמה היא זרימה המעבירה ערך שלם דרך כל אחת מקשתות הרשת.

שאלה 5

נתונים גרף מכוון אציקלי[4] $G = (V, E)$ ופונקציית משקל[5] על הצמתים $w : V \to \mathbb{R}$. עבור זוג צמתים $u, v \in V$, נסמן ב־$p(u, v)$ את מספר המסלולים השונים מ־u אל v ב־G (המסלולים לאו דווקא זרים בקשתות). נגדיר פונקציה נוספת על הצמתים

$$\alpha(u) = \sum_{v \in V \setminus \{u\}} p(u, v) \cdot w(v).$$

תארו אלגוריתם אשר מחשב את ערכי α של כל צמתי הגרף ואשר זמן הריצה שלו הינו $O(|V| + |E|)$ (ערכי הפונקציה $p(u, v)$ אינם נתונים).

אלגוריתם והסבר:

[4] כלומר, חסר מעגלים מכוונים.

[5] כלומר, ייתכנו גם משקלים חיוביים וגם משקלים שליליים