ת.ז.: __________ מס' מחברת: _____

מבחן ביעילות של חישובים

סמסטר ב' תשס"ה, מועד א'

תאריך: 16.6.05

מרצים: פרופ' מיכה שריר ופרופ' עמוס פיאט

מתרגלים: ורה אסודי ואמתי ערמון

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

בבחינה זו 6 שאלות. יש לענות על **5 מתוך 6** השאלות שבמבחן.

משקל כל שאלה - 20 נקודות. משקלי הסעיפים בכל שאלה שווים.

את התשובות לשאלות יש לכתוב במסגרות המתאימות.

מחברת הבחינה תשמש כטיוטא בלבד ולא תבדק.

נא למלא מס' ת.ז. ומס' מחברת בכל דף של חוברת הבחינה.

קראו בעיון את השאלות לפני שתתחילו לענות.

יש לתת אלגוריתם יעיל ככל האפשר לכל שאלה.

בכל השאלות שמתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת אז הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות).

בהצלחה!

סמנו את 5 השאלות אותן פתרתם על ידי הקפת מספרן הסדורי במעגל:
(בטופס שלא יסומן יבדקו 5 השאלות *הראשונות*!)

1 2 3 4 5 6

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, וצומת $s \in V$. נניח כי מריצים DFS מ- s, ונסמן את עץ ה- DFS שמתקבל ב- T. נניח כי מריצים BFS מ- s ועץ ה- BFS שמתקבל הוא גם כן T. הוכיחו ש- $G=T$.

הוכחה:

מס' מחברת: _____ ת.ז.: ___________

שאלה 2

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון א-ציקלי, נתון ע"י רשימות שכנות, עם משקלים כלשהם על הקשתות.

א. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן שני צמתים $s,t\in V$, מוצא מסלול <u>כבד</u> ביותר מ- s ל- t (כלומר מסלול שסכום משקלי קשתותיו מקסימלי). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מוצא מסלול כבד ביותר ב- G (המסלול יכול להתחיל בצומת כלשהו ולהסתיים בצומת כלשהו). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

שאלה 3

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר, נתון ע"י רשימות שכנות, עם משקלים $w:E\to\{1,2,\dots,|V|\}$.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן קבוצת קשתות $S\subseteq E$ בודק אם קיים עץ פורש מינימלי שמכיל את S, ומוצא עץ פורש מינימלי כזה במידה וקיים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: __________ מס' מחברת: _____

שאלה 4

א. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, מיוצג ע"י רשימות שכנות, ונתונה חלוקה של V ל- 3 קבוצות זרות $V=A\cup B\cup C$, כך שכל קשת $e\in E$ היא מ- A ל- B או מ- B ל- C. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא קבוצה מקסימלית של מסלולים זרים בצמתים באורך 2 (כלומר מסלולים שמכילים 2 קשתות ו-3 צמתים, אחד מ- A, אחד מ- B ואחד מ- C). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: __________ מס' מחברת: _____

ב. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, וחתך מינימלי (S,T) ב- G.

(i) אם מקטינים קיבול של קשת כלשהי בחתך (S,T), האם הזרימה המקסימלית ב- G בהכרח תקטן? נמקו את תשובתכם.

תשובה: כן / לא
(הקיפו בעיגול)

נימוק:

(ii) אם מגדילים קיבול של קשת כלשהי בחתך (S,T), האם הזרימה המקסימלית ב- G בהכרח תגדל? נמקו את תשובתכם.

תשובה: כן / לא
(הקיפו בעיגול)

נימוק:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 5

א. נתונה מחרוזת P באורך m, ונתון כי $\pi(m)=m-1$. כמה תוים שונים יכולים להיות ב- P לכל היותר? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

נימוק:

מס' מחברת: _____ ת.ז.: ___________

ב. נתונה מחרוזת T באורך n. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא את הרישא המקסימלית של T המופיעה גם בדילוגים של שני תווים בתוך T (כלומר אם זאת רישא באורך k אז קיים i כך ש: T[i]=T[1], T[i+2]=T[2], T[i+4]=T[3], …, T[i+2k-2]=T[k]). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.:__________ מס' מחברת: ____

שאלה 6

עבור כל אחת משתי הבעיות הבאות, קבעו האם הבעיה ב- P או ב- NPC, והוכיחו את קביעתכם.

א. קלט: גרף לא מכוון ולא בהכרח פשוט $G=(V,E)$ עם משקלים טבעיים על הקשתות ומספר טבעי k.
שאלה: האם קיימת תת-קבוצה $E' \subseteq E$ שמשקלה הכולל הוא לכל היותר k, כך שהגרף (V,E') קשיר?

תשובה: P / NPC

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

ב. קלט: גרף לא מכוון ולא בהכרח פשוט $G=(V,E)$ עם משקלים טבעיים על הקשתות ומספר טבעי k.
שאלה: האם קיימת תת-קבוצה $E'\subseteq E$ שמשקלה הכולל הוא בדיוק k, כך שהגרף (V,E') קשיר?

תשובה: P / NPC

הוכחה: