ת.ז.: ____________ מס' מחברת: ______

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תשע"ג, מועד ב'

תאריך: 9 בספטמבר 2013

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' רון שמיר

מתרגלים: רני הוד, שי ורדי

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1		
2		
3		
4		
5		

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. נאמר שצומת v הוא בדרך מצומת x לצומת y אם יש מסלול $x \rightsquigarrow y$ (לאו דווקא פשוט) כך ש-v צומת פנימי במסלול זה.

תארו אלגוריתם יעיל שבהנתן G ושלושה צמתים שונים $x,y,z \in V$, מחשב את קבוצת הצמתים $U \subseteq V$ שכל אחד מהם נמצא בדרך מ-x ל-y אבל לא בדרך מ-y ל-z.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: ______

שאלה 2

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$, נתון עפ"מ $T=(V,E')$ של G (ביחס ל-w) ונתונות שלוש קשתות $e_1,e_2,e_3\in E'$. ידוע כי הגרף $G'=G\setminus\{e_1,e_2,e_3\}$ קשיר.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן לחישוב עפ"מ של G' (ביחס ל-w).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ ונתון צומת $s\in V$ כך שכל צומת אחר נגיש ממנו בגרף. לכל אחד מהמקרים הבאים, הוכיחו או הפריכו את הטענה:

"מובטח שריצת Dijkstra על G מהצומת s תחזיר עץ מק"בים".

1. נתון שכל הקשתות ממשקל שלילי יוצאות מ-s ושאין קשתות שנכנסות ל-s.

הוכחה/דוגמא נגדית:

2. נתון שיש קשת שלילית אחת e^* ממשקל $-x$ ולכל קשת אחרת $e\neq e^*$ מתקיים $w(e)>x$.

הוכחה/דוגמא נגדית:

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: ______

שאלה 4

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וידוע ש-G אינו דו־צדדי. להלן אלגוריתם עבור בעיית הזיווג המקסימלי: נתבונן בגרף החילה (incidence) H של G. זהו גרף דו־צדדי שצמתיו הם V בצד האחד ו-E בצד השני. עבור $v \in V$, $e \in E$, v ו-e הם שכנים ב-H אם"ם v הוא קצה של e. כעת נהפוך את H לרשת זרימה באופן הבא:

- נוסיף צומת מקור s שיחובר לכל $v \in V$ ע"י קשת מקיבול 1;
- נכוון את קשתות H מ-V אל E וניתן קיבול 1 לכולן;
- נוסיף צומת בור t שכל $e \in E$ תחובר אליו ע"י קשת מקיבול 2.

כעת נחשב זרימה מקסימלית f^* מ-s ל-t ברשת.

נסמן את גודל הזיווג המקסימלי בגרף G ב-m. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) $m \geq \frac{1}{2}|f^*|$; **(ב)** $m \leq \frac{1}{2}|f^*|$.

הוכחה/דוגמא נגדית:

ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

שאלה 5

בעקבות רפורמה מוניטרית פתאומית, יצאו מן המחזור כל המטבעות הקיימים ונכנסו במקומם n מטבעות חדשים. הקוד האתי של חברת *משקך* קובע שמכונות שתיה תמיד תחזרנה ללקוח עודף המורכב ממספר מינימלי של מטבעות.

לאונרד קנה במכונת השתייה בבניין שרייבר בקבוק של דום פריניון '85 ושילם בשטר של $n^3 + 10n + 2013$ ש"ח ולכן יש להחזיר לו עודף בסך $n^3 + 10n + 209$ ש"ח. תארו אלגוריתם יעיל שמקבל רשימה $1 = v_1 < \cdots < v_n$ של ערכי מטבעות שלמים ומחשב כיצד להחזיר את העודף במספר מינימלי של מטבעות (ניתן להניח שבמכונה יש מספיק מטבעות מכל סוג).

יעילות:

אלגוריתם והסבר: